ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales de Sturm-Liouville.* Nota di W. STEKLOFF, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Désignons par $V_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ les fonctions fondamentales définies par les équations

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dV_k(x)}{dx}\right) + [q(x)\lambda_k^2 - r(x)]\,V_k(x) = 0\,, \quad a < x < b$$

jointes aux conditions aux limites

$$(2) \qquad V_k'(a) - h\,V_k(a) = 0 \quad , \quad V_k'(b) + H\,V_k(b) = 0\,.$$

Je vais considérer, dans ce qui va suivre, le cas où les fonctions données satisfont aux conditions suivantes:

$p(x)$ et $q(x)$ restent positives et admettent les dérivées des deux premiers ordres dans l'intervalle (a, b);

les dérivées du second ordre de $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues et à variation bornée dans (a, b);

les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ ne s'annulent pas dans (a, b);

la fonction $r(x)$ reste positive et continue dans l'intervalle considéré;

les constantes h et H sont finies et positives.

Introduisons, avec J. Liouville, une nouvelle variable t, au lieu de x, et une nouvelle fonction $u_k(t)$, au lieu de $V_k(x)$, en posant

$$t = \int_a^x dx\sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}} \quad , \quad V_k(x) = z(t)\,u_k(t)\,,$$

où

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)\,q(x)}}$$

et désignons par T la valeur de t correspondant à $x = b$.

L'équation (1) deviendra

$$u_k''(t) + \lambda_k^2\,u_k(t) = \mu(t)\,u_k(t)\,,$$

où

$$\mu(t) = \frac{1}{z\sqrt{pq}}\left(rz\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{d\sqrt{pq}}{dt}\frac{dz}{dt} - \frac{d^2z}{dt^2}\sqrt{pq}\right).$$

La fonction $u_k(t)$ peut être présentée sous la forme suivante

$$u_k(t) = \cos \lambda_k t + \frac{\psi(t)}{\lambda_k} \sin \lambda_k t + \frac{\vartheta_k(t)}{\lambda_k^2},$$

où l'on a posé

$$\vartheta_k(t) = -\frac{\lambda_k}{2} \int_0^t \mu(\xi) \sin \lambda_k(2\xi - t)\, d\xi - \int_0^t \mu(\xi) \sin \lambda_k(\xi - t)\, \omega_k(\xi)\, d\xi,$$

$$\psi(t) = h' + \frac{1}{2} \int_0^t \mu(\xi)\, d\xi \text{ (1)},$$

$\omega_k(\xi)$ étant une fonction dont le module ne surpasse pas un nombre fixe.

Il est évident que $\psi(t)$ est une fonction continue et à variation bornée dans $(0, T)$; il en est de même de la fonction $\mu(\xi)$, d'après les hypothèses faites plus haut.

On a donc

$$|\vartheta_k(t)| < A,$$

A désignant un nombre fixe.

2. Soit $f(x)$ une fonction quelconque intégrable dans (a, b).

Posons

$$F(t) = f(x) \sqrt[4]{p(x)\, q(x)}. \tag{3}$$

On aura

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{V_k(x) \int_a^b q(x) f(x) V_k(x)\, dx}{\int_a^b q(x) V_k^2(x)\, dx} = \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)\, q(x)}} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k(t) \int_0^T F(t)\, u_k(t)\, dt}{\int_0^T u_k^2(t)\, dt}. \tag{4}$$

En se rappelant maintenant les formules

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{T} + \frac{B_k}{k},$$

$$\int_0^T u_k^2(t)\, dt = \frac{T}{2} + \frac{C_k}{\lambda_k} = \frac{T}{2} + \frac{D_k}{k},$$

où B_k et D_k sont des constantes dont les modules ne surpassent pas un certain nombre fixe B (2), on obtient, après des calculs simples,

$$\sum_{k=1}^{n} T_k(t) = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi t}{T} \int_0^T F(t) \cos \frac{k\pi t}{T}\, dt + \sum_{k=1}^{n} T_k^{(1)}(t), \tag{5}$$

(1) Voir W. Stekloff, *Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par les équations différentielles du second ordre* etc. Communications de la Société mathématique de Kharkow, 1907

(2) Voir J. Liouville, *Sur le développement des fonctions en séries dont divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre*

où l'on a posé

$$T_k(t) = \frac{u_k(t) \int_0^T F(t)\, u_k(t)\, dt}{\int_0^T u_k^2(t)\, dt},$$

$$T_k^{(1)}(t) = \frac{h_k(t)}{k} \int_0^T F(t) \cos \frac{k\pi t}{T}\, dt + \frac{g_k(t)}{k} \int_0^T t\, F(t) \sin \frac{k\pi t}{T}\, dt +$$

$$(6) \qquad + \frac{p_k(t)}{k} \int_0^T t\, F(t) \cos \frac{k\pi t}{T}\, dt + \frac{q_k(t)}{k} \int_0^T \psi(t)\, F(t) \sin \frac{k\pi t}{T}\, dt +$$

$$+ \frac{r_k(t)}{k^2} \int_0^T \omega_k(t)\, F(t)\, dt,$$

$h_k(t)$, $g_k(t)$, $p_k(t)$, $q_k(t)$, $r_k(t)$ et $\omega_k(t)$ étant certaines fonctions de t satisfaisant aux conditions

$$(7) \qquad |h_k(t)| < C,\ |g_k(t)| < C,\ \ldots,\ |r_k(t)| < C,\ |\omega_k(t)| < C,$$

C désignant un nombre fixe.

3. Considérons la somme

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k(t)}{k} \int_0^T \varphi(t)\, F(t) \cos \frac{k\pi t}{T}\, dt,$$

où $\varphi(t)$ est une fonction quelconque intégrable dans $(0, T)$, $\mu_k(t)$ sont des fonctions dont les modules ne surpassent pas un nombre fixe C. On trouve, moyennant le lemme de Cauchy,

$$S^2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k^2(t)}{k^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^T \varphi(t)\, F(t) \cos \frac{k\pi t}{T}\, dt \right)^2,$$

d'où l'on tire aisément, en tenant compte de (7),

$$(8) \qquad S^2 < L^2 \int_0^T F^2(t)\, dt.$$

On aura de même

$$(9) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k(t)}{k} \int_0^T \varphi(t)\, F(t) \sin \frac{k\pi t}{T}\, dt \right)^2 < L^2 \int_0^T F^2(t)\, dt.$$

Il est évident, enfin, que, en vertu de (7),

$$(10) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k(t)}{k^2} \int_0^T \omega_k(t)\, F(t)\, dt \right)^2 < L^2 \int_0^T F^2(t)\, dt,$$

L^2 désignant un nombre fixe.

---

contenant un paramètre variable. Journal de Liouville, t. II, pag. 16 etc.; A Kneser, *Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen* etc. Mathematische Annalen, Bd. LVIII, Heft $^1/_2$.

Appliquons maintenant les inégalités générales (8), (9) et (10) à la dernière somme du second membre de l'égalité (5).

On trouve, en vertu de (6),

$$(11)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n} T_k^{(1)}(t)\right| < K\sqrt{\int_0^T F^2(t)\,dt},$$

K étant un nombre fixe.

4. Désignons maintenant par $\varphi(t)$ et $f(t)$ deux fonctions quelconques dont l'une $\varphi(t)$ *est intégrable*, l'autre $f(t)$ *est continue* dans $(0, T)$.

Posons

$$\frac{\varphi(t_0+0)+\varphi(t_0-0)}{2} = \sum_{k=1}^{n} B_k u_k(t_0) + \varrho_n(t_0)\ ,\ B_k = \frac{\int_0^T \varphi(t)\,u_k(t)\,dt}{\int_0^T u_k^2(t)\,dt},$$

$$f(t_0) = \sum_{k=1}^{n} A_k u_k(t_0) + R_n(t_0)\ ,\ A_k = \frac{\int_0^T f(t)\,u_k(t)\,dt}{\int_0^T u_k^2(t)\,dt},$$

t_0 désignant une valeur quelconque de t appartenant à l'intervalle $(0, T)$.

On trouve

$$(12)\qquad \varrho_n(t_0) = \frac{\varphi(t_0+0)+\varphi(t_0-0)}{2} - f(t_0) + R_n(t_0) - \sum_{k=1}^{n}(B_k - A_k)u_k(t_0).$$

Prenons pour $f(t)$ une fonction définie par l'intégrale

$$(13)\qquad f(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varphi(t)\,dt.$$

Il est aisé de comprendre que le théorème de ma Note récente: *Sur le développement d'une fonction arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales* (C. R., II semestre, 1910) s'applique à la fonction $f(t)$ et conduit à l'inégalité

$$(14)\qquad |R_n(t_0)| < \frac{Q}{h\sqrt{n}},$$

Q désignant un nombre fixe.

Faisons, dans (5),

$$F(t) = \varphi(t) - f(t).$$

On trouve

$$(15)\qquad \sum_{k=1}^{n}(B_k - A_k)\,u_k(t_0) = \sum_{k=1}^{n} T_k(t_0) = S_n(t_0) - \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} T_k^{(1)}(t_0),$$

où l'on a posé

$$(15_1)\qquad S_n(t_0) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt + \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi t}{T}\int_0^T F(t)\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt.$$

5. Décomposons l'intervalle $(0, T)$ on q intervalles particuliers e_j et désignons par e_k ceux de ces intervalles où l'oscillation de la fonction $F(t)$ est plus petite qu'un nombre fixe δ, donné à l'avance, par e_i ceux où cette oscillation surpasse δ.

$F(t)$ étant intégrable dans $(0, T)$, on peut choisir une décomposition convenable telle qu'on ait

$$(16)\qquad \sum e_i < \delta,$$

la somme étant étendue à tous les intervalles e_i où l'oscillation de $F(t)$ surpasse δ.

Désignons par M_0 le maximum de $|F(t)|$ dans les intervalles e_k, par M son maximum dans l'intervalle $(0, T)$ tout entier.

On trouve, en vertu de (16),

$$(17)\qquad \left|\int_0^T F(t)\,dt\right| < \int_{e_k}|F(t)|\,dt + \int_{e_i}|F(t)|\,dt < M_0T + M\delta.$$

Or l'équation (16) montre qu'on peut toujours choisir le nombre h de façon qu'on ait

$$|F(t)| = |\varphi(t) - f(t)| \leqq M_0 < \delta$$

pour toutes les valeurs de t appartennant aux intervalles que nous avons désignés par e_k.

Le nombre $h = h_0$ étant ainsi choisi, on obtient, eu égard à (17),

$$(18)\qquad \left|\int_0^T F(t)\,dt\right| < (T + M)\,\delta < N\delta.$$

On s'assurera ensuite, de la même manière, que

$$(19)\qquad \int_0^T F^2(t)\,dt < M_0^2\,T + M^2\delta < N_1\delta,$$

N et N_1 désignant des nombres fixes.

6. Rapprochons maintenant les formules (12), (14), (15), (15_1), (11), (18) et (19), *on obtient cette inégalité remarquable*

$$|\varrho_n(t_0)| < \left|\frac{\varphi(t_0+0)+\varphi(t_0-0)}{2} - f(t_0) - S_n(t_0)\right| + \frac{Q}{h_0\sqrt{n}} + R\sqrt{\delta},$$

ayant lieu toujours, quelle que soit la fonction $\varphi(t)$ intégrable dans $(0, T)$ et quel que soit le nombre n.

De cette inégalité on tire immédiatement, en vertu de (4), les théorèmes suivants:

THÉORÈME I. — *Toute fonction donnée $f(x)$ satisfaisant à l'une de ces trois conditions:*

1) *elle est continue et à variation bornée,*

2) *elle satisfait à la condition de Lipschitz:*

$$|f(x+h)-f(x)| < \lambda h^{\alpha}\ ,\ h>0\ ,\ \alpha \leqq 1\ ,$$

3) *elle satisfait à la condition de Dini-Lipschitz:*

$$\lim_{h=0} \{ \log h\, [f(x+h)-f(x)] \} = 0\ ,$$

se développe en série uniformément convergente de la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k(x) \int_a^b q(x)\, f(x)\, V_k(x)\, dx}{\int_a^b q(x)\, V_k^2(x)\, dx}\ , \tag{20}$$

quelle que soit la suite de fonctions fondamentales $V_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ définies au début du n°. 1.

Pour toute fonction à variation bornée la somme de cette série est égale à

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

en tout point x intérieur à l'intervalle (a, b).

THÉORÈME II. — *Quelle que soit la fonction $f(x)$, continue dans (a, b), on a toujours*

$$\left| f(x) - \frac{\sum_{k=1}^{n} S_k(x)}{n} \right| < \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqq n_0\ ,$$

ε désignant un nombre positif arbitrairement petit, et $S_k(x)$ la somme de k premiers termes de la série (20), c'est-à-dire

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} S_k(x)}{n}\ .$$

C'est une extension du théorème de Fejér, concernant les séries trigonométriques, aux fonctions fondamentales de Sturm-Liouville.

Théorème III. — *Toute fonction continue $f(x)$ se développe, dans l'intervalle (a, b), en série uniformément convergente de la forme*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k(x) \int_a^b q(x) f(x) V_k(x) dx}{\int_a^b q(x) V_k(x) dx}.$$

La méthode exposée s'applique à plusieurs autres suites de fonctions fondamentales, par exemple, aux fonctions dont j'ai établi l'existence dans ma Note: *Sur un théorème général d'existence des fonctions fondamentales etc.* (C. R., 21 févr. 1910), et conduit à des résultats analogues à ceux que je viens d'énoncer.

Fisica. — *Sulla sede della forza elettromotrice delle coppie voltaiche.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

Nonostante il numero grandissimo di lavori che da oltre un secolo vennero pubblicati a favore della teoria del contatto o della teoria chimica della pila e nonostante che molti di questi lavori siano stati eseguiti con grande studio ed acume, può dirsi che rimane tuttavia dubbio se la forza elettromotrice delle coppie voltaiche risieda nel contatto dei due metalli o nel contatto di ciascuno di questi coll'elettrolito oppure, come Volta fu condotto ad ammettere, in tutti tre questi contatti. Parecchi fisici autorevoli, per intuizione, o guidati da speciali teorie, hanno creduto di poter risolvere il dubbio suddetto in un senso o nell'altro, ma il fatto che opinioni contrarie possono tuttavia sussistere prova che nessuna di esse è incontrastabilmente dimostrata, e chi senza preconcetti si accinge allo studio di questo argomento non riesce a trovare una prova decisiva di nessuna delle suddette opinioni.

L'ipotesi che fra metalli a contatto esista una differenza di potenziale è basata unicamente su misure della medesima eseguite cogli elettrometri, in modi svariatissimi e con risultati abbastanza concordi. Su tutte queste misure, incominciando da quelle di Volta fino a quelle più recenti (p. es. del Majorana) si suppone implicitamente che non esista differenza di potenziale fra i metalli e l'aria o il dielettrico in cui sono immersi, ciò che non è dimostrato ed anzi pare improbabile per molte ragioni.

I due metalli immersi nell'aria si trovano in condizioni che non paiono essenzialmente diverse da quelle degli stessi metalli immersi in un elettrolito, poichè l'ionizzazione dell'aria può ritenersi in certi rispetti equivalente alla dissociazione dell'elettrolito. I due metalli a contatto immersi nell'aria possono quindi esser considerati come formanti una coppia con grandissima resistenza interna e con resistenza esterna trascurabile. La differenza di po-