ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 dicembre 1910.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla distribuzione dell'elettricità in equilibrio nei conduttori.* Nota del Corrispondente E. Almansi.

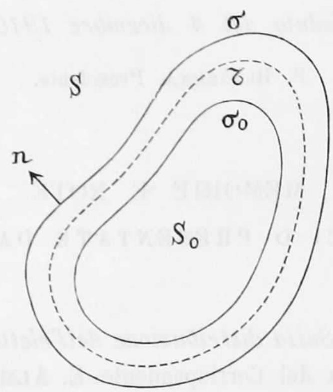
1. Nella Elettrostatica si presenta, fin dal principio, il problema di distribuire una massa M sopra una superficie chiusa σ in modo che la forza F risulti nulla in tutti i punti dello spazio interno.

Prendiamo in esame quest'altro problema: *Distribuire sulla superficie* σ *la massa* M *in modo che nello spazio* S_0 *limitato da una superficie chiusa* σ_0 *contenuta entro* σ, *vicina a* σ *quanto si voglia, ma non avente con essa punti a comune, la forza* F *non superi in grandezza un numero assegnato* ε *piccolo ad arbitrio.*

Il prendere in esame questo secondo problema — che ammette, come vedremo, una risoluzione molto semplice — è giustificato dal fatto che se consideriamo σ come la superficie di un conduttore, noi non potremo, nella pratica, eseguire delle esperienze in *tutto* lo spazio racchiuso da σ, ma solo in una parte S_0 limitata da una superficie σ_0, distinta da σ, che rappresenterà la superficie interna del conduttore. E inoltre, quand'anche si faccia uso di uno strumento così sensibile da avvertire l'esistenza di forze elettriche estremamente piccole, se esso non ci rivela, in nessun punto di S_0, l'esistenza di una forza, a rigore noi potremo concludere soltanto che in questo spazio non esistono forze di tale intensità da esercitare un'azione sensibile sullo strumento che adoperiamo.

La risoluzione del secondo problema è insomma sufficiente a provare che i resultati dell'esperienza sono in accordo colla teoria, in quanto da essa risulta la possibilità di una distribuzione della massa M sulla superficie σ, la quale, nello spazio S_0 in cui possiamo sperimentare, dà luogo a forze che non raggiungono il grado di sensibilità, comunque prossimo a zero, dello strumento adoperato.

2. Sia τ una superficie chiusa, compresa fra σ e σ_0, che non abbia nessun punto a comune nè con σ_0 nè con σ. E rappresenti φ il potenziale di una massa uguale ad M, comunque distribuita sulla superficie τ.



Detta n, in un punto qualunque di σ, la normale esterna, poniamo:

$$h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}; \tag{1}$$

e immaginiamo una massa, il cui potenziale diremo U, distribuita sulla superficie σ con densità h. Questa massa $\int_\sigma h d\sigma$ è uguale ad M: ciò si riconosce dalla formula precedente, osservando che φ è il potenziale di una massa M distribuita sulla superficie τ contenuta entro σ.

Sia Q il punto (o *un* punto) di τ in cui il potenziale U assume, su questa superficie, il valore *massimo*; Q′ il punto, o un punto, di τ in cui U assume il valore *minimo*. Notiamo che se U fosse costante su tutta la superficie τ, esso sarebbe costante anche nello spazio interno, anzi in tutto lo spazio limitato da σ, in cui U è una funzione regolare armonica; e colla distribuzione di densità h avremmo senz'altro risoluto il primo dei due problemi enunciati.

Dal potenziale φ passeremo al potenziale φ_1 ponendo:

$$\varphi_1 = \varphi - ap, \tag{2}$$

ove a denota una costante, di cui stabiliremo più avanti il valore, e p il potenziale di due masse $+1$ e -1, situate nei punti Q e Q′ di τ. Anche φ_1 è il potenziale di una massa uguale ad M distribuita sopra τ: precisamente della massa M a cui è dovuto il potenziale φ, e di due masse uguali e contrarie, $-a$ e $+a$.

Come da φ siamo passati a φ_1, così da φ_1 passeremo successivamente ai potenziali $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_i, \ldots$, ponendo in generale $\varphi_{i+1} = \varphi_i - a_i p_i$, ove a_i è pure una costante, e p_i il potenziale di due masse $+1$ e -1 situate in due punti Q_i e Q'_i di τ in cui sia rispettivamente massimo e minimo il potenziale U_i dovuto alla massa M distribuita sulla sup. σ con densità

$$h_i = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}.$$

Noi dimostreremo che, attribuiti valori convenienti alle costanti a, a_1, $a_2, \ldots$, per un valore abbastanza grande di i h_i rappresenta la densità relativa ad una distribuzione della massa M, che soddisfa alla condizione richiesta; che, cioè, dà luogo nello spazio S_0 ad una forza la cui grandezza è in ogni punto, inferiore od uguale ad ε.

3. Poniamo

$$A = \int_S \Delta\varphi \, dS,$$

ove $\Delta\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$, ed S denota lo spazio esterno rispetto a σ (superficie del conduttore). In modo analogo definiamo A_1, A_2, ecc.

Dalla formula (2) si ha:

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi - 2a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + a^2 \Delta p;$$

quindi, posto

$$B = \int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z}\right) dS, \quad C = \int_S \Delta p \, dS, \tag{3}$$

sarà:

$$A_1 = A - 2aB + a^2 C,$$

o più semplicemente:

$$A_1 = A - \alpha, \tag{4}$$

essendo

$$\alpha = 2aB - a^2 C.$$

Ora fissiamo il valore della costante a: prendiamo $a = \frac{B}{C}$. Avremo:

$$\alpha = \frac{B^2}{C}. \tag{5}$$

Si noti che non può essere $C = 0$; giacchè, per la seconda delle formule (3), e per l'annullarsi di p all'infinito, dovrebbe essere $p = 0$ in tutti i punti dello spazio S, mentre p è certo diverso da zero in qualunque punto non equidistante dai due punti Q e Q' in cui si trovano le masse $+1$ e -1 di cui p è il potenziale.

Gl'integrali estesi allo spazio S che rappresentano B e C possiamo trasformarli in integrali estesi alla superficie σ. Sarà:

$$(6) \qquad B = -\int_\sigma p \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma, \quad C = -\int_\sigma p \frac{\partial p}{\partial n} d\sigma .$$

Esaminiamo la quantità B. Tenendo conto della formula (1) abbiamo:

$$B = 4\pi \int_\sigma ph\, d\sigma .$$

Diciamo r ed r' le distanze di un punto qualunque P di σ dai punti Q e Q' di τ, ossia dalle masse $+1$ e -1 a cui è dovuto il potenziale p. Sarà:

$$(7) \qquad p = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'},$$

e perciò

$$B = 4\pi \int_\sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) h d\sigma = 4\pi \left\{ \int_\sigma \frac{h}{r} d\sigma - \int_\sigma \frac{h}{r'} d\sigma \right\}.$$

Ma la quantità dentro parentesi non è altro che la differenza fra i valori che assume nei punti Q e Q' il potenziale dovuto alla massa M distribuita con densità h sulla superficie σ. Chiamando D questa differenza *fra il massimo e il minimo valore di* U *sopra* τ (§ 2) avremo: $B = 4\pi D$. E la formula (5) potrà scriversi:

$$(8) \qquad \alpha = 16\pi^2 \frac{D^2}{C}.$$

Aggiungiamo un'osservazione sul valore della quantità C, che è rappresentata mediante un integrale esteso a σ dalla seconda delle formule (6); il valore di p, in un punto qualunque P di σ, è dato dalla (7). Poichè la superficie σ, e la superficie τ ove si trovano le due masse $+1$ e -1, di cui p è il potenziale, non hanno punti a comune, esisterà un limite superiore finito dei valori assoluti di p, e così pure un limite superiore finito dei valori assoluti di $\frac{\partial p}{\partial n}$, per qualunque posizione del punto P sopra σ, e delle due masse $+1$ e -1 sopra τ; quindi ancora un limite superiore finito L dei valori che può assumere la quantità positiva C.

Per la formula (8), che possiamo scrivere $D^2 = \frac{C}{16\pi^2}\alpha$, e per essere $C \leqq L$, sarà:

$$D^2 \leqq \frac{L}{16\pi^2}\alpha .$$

Parimente avremo:

$$D_i^2 \leqq \frac{L}{16\pi^2}\alpha_i , \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

ove D_i rappresenta la differenza fra il massimo e il minimo valore che assume sopra τ il potenziale U_i, α_i la differenza fra la quantità A_i ed A_{i+1}.

4. Dalle cose dette segue immediatamente la risoluzione del problema. Le quantità α_i, come la α che è data dalla formula (5), son tutte positive o nulle; quindi per la formula generale $A_{i+1} = A_i - \alpha_i$, analoga alla (4), sarà $A_{i+1} \leqq A_i$. Ma le quantità A_i sono essenzialmente positive: col crescere di i esse dovranno dunque tendere verso un limite determinato. E le loro differenze α_i dovranno tendere a *zero*. Per la formula (9) sarà pure:

$$\lim_{i=\infty} D_i = 0 .$$

Ora D_i rappresenta la differenza fra il massimo e il minimo valore di U_i sopra τ; quindi anche la differenza fra il massimo e il minimo valore di U_i nell'intero spazio T limitato da τ. Dunque, col crescere di i, tenderà a zero la differenza fra i valori di U_i in due punti qualunque di τ. Diciamo K_i il valore di U_i in un punto fisso di T, e poniamo $U_i = K_i + u_i$. Col crescere di i, u_i tenderà uniformemente a zero in tutto lo spazio T.

Diciamo ϱ la minima distanza fra la superficie τ e la superficie σ_0 (superficie interna del conduttore). E sia P_0 un punto qualunque dello spazio S_0 limitato da σ_0. Noi potremo considerare P_0 come centro di una sfera di raggio ϱ tutta contenuta entro T. I valori della funzione regolare armonica u_i, e delle sue derivate $\frac{\partial u_i}{\partial x}$, ecc., in un punto qualunque della sfera, in particolare nel centro P_0, si sanno esprimere mediante i valori che assume u_i, sulla superficie. Col tendere di questi a zero, tendono anche a zero, nel punto P_0, le derivate di u_i, ossia le derivate di U_i, che rappresentano, a meno del segno, le componenti della forza dovuta alla massa M distribuita sulla superficie σ con densità h_i. Si dovrà dunque arrivare ad un valore di i per il quale la grandezza della forza non supera, in nessun punto di S_0, un numero assegnato ε, piccolo ad arbitrio.

Così il problema è risolto.

Un procedimento perfettamente analogo può applicarsi al caso generale di quanti conduttori si voglia, carichi di date masse, e posti in presenza di masse esterne, fisse.

Matematica. — *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna.* Nota del Corrispondente G. Lauricella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Cinematica. — *La trajettoria caratteristica del fenomeno di Zeeman.* Nota del Corrisp. A. Garbasso.

1. In una Nota, che fu pubblicata in questi Rendiconti [1], ho studiato la trajettoria di un elettrone, oscillante da principio lungo un segmento di retta, e sollecitato poi da un campo magnetico uniforme.

Facevo vedere che tale trajettoria si projetta nel piano normale alle linee di forza secondo la curva che Guido Grandi chiamò Rodonea [2], mentre giace sopra un cono circolare, con l'asse nella direzione delle dette linee.

Non è difficile generalizzare codesti risultati, nell'ipotesi che il primo moto non perturbato sia ellittico invece che rettilineo.

2. Se si assumono tre assi ortogonali (x, y, z) e l'ultimo si rivolge nella direzione del campo, si può scrivere, con piena generalità

$$\left\{\begin{aligned} x &= c_1 \cos 2\pi(n-n')t + c_2 \cos 2\pi(n+n')t\,, \\ y &= c_1 \sin 2\pi(n-n')t - c_2 \sin 2\pi(n+n')t\,, \\ z &= c_3 \sin(2\pi nt+\gamma)\,, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

essendo le c_1, c_2, c_3, n, n' e γ sei costanti.

Ponendo

$$\left\{\begin{aligned} 2\pi(n-n') &= r\,, \\ 2\pi(n+n') &= s\,, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

viene subito

$$\left\{\begin{aligned} x &= c_1 \cos rt + c_2 \cos st\,, \\ y &= c_1 \sin rt - c_2 \sin st\,, \end{aligned}\right.$$

e da queste

$$\left\{\begin{aligned} x+iy &= c_1 e^{irt} + c_2 e^{-ist}\,, \\ x-iy &= c_1 e^{-irt} + c_2 e^{ist}\,, \end{aligned}\right.$$

[1] A. Garbasso, *Alcune trajettorie d'elettroni*, Rend. R. Accademia dei Lincei, (5), XVIII, 1° sem., 583, 1909.

[2] Almeno per certi valori particolari del campo.