ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna.* Nota del Corrispondente G. LAURICELLA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Cinematica. — *La trajettoria caratteristica del fenomeno di Zeeman.* Nota del Corrisp. A. GARBASSO.

1. In una Nota, che fu pubblicata in questi Rendiconti [1], ho studiato la trajettoria di un elettrone, oscillante da principio lungo un segmento di retta, e sollecitato poi da un campo magnetico uniforme.

Facevo vedere che tale trajettoria si projetta nel piano normale alle linee di forza secondo la curva che Guido Grandi chiamò Rodonea [2], mentre giace sopra un cono circolare, con l'asse nella direzione delle dette linee.

Non è difficile generalizzare codesti risultati, nell'ipotesi che il primo moto non perturbato sia ellittico invece che rettilineo.

2. Se si assumono tre assi ortogonali (x, y, z) e l'ultimo si rivolge nella direzione del campo, si può scrivere, con piena generalità

$$(1)\quad \begin{cases} x = c_1 \cos 2\pi(n-n')\,t + c_2 \cos 2\pi(n+n')\,t\,, \\ y = c_1 \sin 2\pi(n-n')\,t - c_2 \sin 2\pi(n+n')\,t\,, \\ z = c_3 \sin(2\pi n t + \gamma)\,, \end{cases}$$

essendo le c_1, c_2, c_3, n, n' e γ sei costanti.

Ponendo

$$(2)\quad \begin{cases} 2\pi(n-n') = r\,, \\ 2\pi(n+n') = s\,, \end{cases}$$

viene subito

$$\begin{cases} x = c_1 \cos rt + c_2 \cos st\,, \\ y = c_1 \sin rt - c_2 \sin st\,, \end{cases}$$

e da queste

$$\begin{cases} x + iy = c_1 e^{irt} + c_2 e^{-ist}\,, \\ x - iy = c_1 e^{-irt} + c_2 e^{ist}\,, \end{cases}$$

[1] A. Garbasso, *Alcune trajettorie d'elettroni,* Rend. R. Accademia dei Lincei, (5), XVIII, 1° sem., 583, 1909.

[2] Almeno per certi valori particolari del campo.

e in coordinate polari

$$\begin{cases} \varrho e^{i\theta} = c_1 e^{irt} + c_2 e^{-ist}, \\ \varrho e^{-i\theta} = c_1 e^{-irt} + c_2 e^{ist}, \end{cases}$$

e con le posizioni

$$(3) \qquad \begin{cases} e^{irt} = u, \\ e^{-ist} = v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varrho e^{i\theta} = c_1 u + c_2 v, \\ \varrho e^{-i\theta} = \dfrac{c_1}{u} + \dfrac{c_2}{v}. \end{cases}$$

Si ricava di qui

$$(4) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\varrho^2 + c_1^2 - c_2^2 \pm i\sqrt{4c_1^2\varrho^2 - (\varrho^2 + c_1^2 - c_2^2)^2}}{2c_1 \varrho e^{-i\theta}}, \\ v = \dfrac{\varrho^2 - c_1^2 + c_2^2 \mp i\sqrt{4c_2^2\varrho^2 - (\varrho^2 - c_1^2 + c_2^2)^2}}{2c_2 \varrho e^{-i\theta}}; \end{cases}$$

nelle quali formole il segno superiore corrisponde al superiore, e l'inferiore all'inferiore.

Per andare innanzi osserviamo intanto che è identicamente

$$4c_1^2\varrho^2 - (\varrho^2 + c_1^2 - c_2^2)^2 = 4c_2^2\varrho^2 - (\varrho^2 - c_1^2 + c_2^2)^2,$$

chiamiamo R^2 il valore comune di queste espressioni, e dalle (3) ricaveremo subito

$$\left(\frac{\varrho^2 + c_1^2 - c_2^2 - iR}{2c_1 \varrho e^{-i\theta}}\right)^{-s} = \left(\frac{\varrho^2 - c_1^2 + c_2^2 + iR}{2c_2 \varrho e^{-i\theta}}\right)^{r},$$

vale a dire

$$(5) \qquad \left(\frac{\varrho^2 + c_1^2 - c_2^2 - iR}{2c_1 \varrho}\right)^{-s} = \left(\frac{\varrho^2 - c_1^2 + c_2^2 + iR}{2c_2 \varrho}\right)^{r} \cdot e^{i(s+r)\theta},$$

che è l'equazione della trajettoria projettata sul piano (x, y) (1).

Questa vogliamo ora liberare dagli immaginarii. Notiamo all'uopo che

$$\operatorname{mod} \frac{\varrho^2 + c_1^2 - c_2^2 - iR}{2c_1 \varrho} = \operatorname{mod} \frac{\varrho^2 - c_1^2 + c_2^2 + iR}{2c_2 \varrho} = 1;$$

si può dunque porre

$$\begin{cases} \dfrac{\varrho^2 + c_1^2 - c_2^2 - iR}{2c_1 \varrho} = e^{-i\varphi}, \\ \dfrac{\varrho^2 - c_1^2 + c_2^2 + iR}{2c_2 \varrho} = e^{i\psi}, \end{cases}$$

con

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi = \operatorname{artg} \dfrac{R}{\varrho^2 + c_1^2 - c_2^2} = \operatorname{artg} \alpha, \\ \psi = \operatorname{artg} \dfrac{R}{\varrho^2 - c_1^2 + c_2^2} = \operatorname{artg} \beta, \end{cases}$$

(1) Si è adottato nelle (4) il segno superiore, è facile vedere che l'altra scelta non darebbe un risultato sostanzialmente diverso.

e la (5) prenderà la forma

$$e^{is\varphi} = e^{ir\psi} \,.\, e^{i(s+r)\theta},$$

dalla quale risulta

$$s\varphi - r\psi = (s+r)\,\theta,$$

o, per le (6),

$$s \operatorname{artg} \alpha - r \operatorname{artg} \beta = (s+r)\,\theta,$$

o ancora

$$s' \operatorname{artg} \alpha - r' \operatorname{artg} \beta = (s'+r')\,\theta, \tag{7}$$

essendo

$$\begin{cases} 2\pi r' = r, \\ 2\pi s' = s, \end{cases}$$

vale a dire, per le (2),

$$\begin{cases} r' = n - n', \\ s' = n + n'. \end{cases}$$

Se il rapporto n/n' è un numero razionale, r' e s' si possono considerare come interi, e allora è lecito scrivere

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}(s' \operatorname{artg} \alpha) = \dfrac{s'\alpha - \binom{s'}{3}\alpha^3 + \binom{s'}{5}\alpha^5 - \cdots}{1 - \binom{s'}{2}\alpha^2 + \binom{s'}{4}\alpha_4 - \cdots} = \mathrm{A}, \\[2ex] \operatorname{tg}(r' \operatorname{artg} \beta) = \dfrac{r'\beta - \binom{r'}{3}\beta^3 + \binom{r'}{5}\beta^5 - \cdots}{1 - \binom{r'}{2}\beta^3 + \binom{r'}{4}\beta^4 - \cdots} = \mathrm{B}, \end{array}\right.$$

ritenendo che nelle espressioni di A e B numeratori e denominatori siano polinomii.

Con questo la (7) diventa

$$\operatorname{artg} \mathrm{A} - \operatorname{artg} \mathrm{B} = (s'+r')\,\theta,$$

ossia

$$\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{1 + \mathrm{AB}} = \operatorname{tg}(s'+r')\,\theta = \operatorname{tg} 2n\theta, \tag{8}$$

la quale ultima risolve il problema.

3. Finora abbiamo studiato, anzichè la trajettoria vera, la sua projezione sul piano normale alla linea di forza.

Se si tien conto ancora della componente

$$z = c_3 \sin(2\pi n t + \gamma) \tag{9}$$

le foglie della curva (8) si deformano o vengono ad adagiarsi sopra una superficie, la cui equazione si ottiene eliminando il tempo fra la (9) e la

$$\varrho^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \cos 4\pi nt\,, \tag{10}$$

conseguenza immediata delle prime due fra le (1).

Poniamo per brevità

$$2\pi nt = \tau\,,$$

e avremo

$$\begin{cases} \varrho^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \cos 2\tau\,, \\ z \;= c_3 \sin(\tau + \gamma)\,, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} c_1 c_2 (e^{2i\tau} + e^{-2i\tau}) = \varrho^2 - (c_1^2 + c_2^2)\,, \\ c_3^2 (e^{2i\gamma} . e^{2i\tau} + e^{-2i\gamma} . e^{-2i\tau}) = 2(c_3^2 - 2z^2)\,, \end{cases}$$

e quindi

$$e^{2i\tau} = \frac{\begin{vmatrix} \varrho^2 - (c_1^2 + c_2^2) & c_1 c_2 \\ 2(c_3^2 - 2z^2) & c_3^2 e^{-2i\gamma} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 c_2 & c_1 c_2 \\ c_3^2 e^{2i\gamma} & c_3^2 e^{-2i\gamma} \end{vmatrix}}\,,$$

$$e^{-2i\tau} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 c_2 & \varrho^2 - (c_1^2 + c_2^2) \\ c_3^2 e^{2i\gamma} & 2(c_3^2 - 2z^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 c_2 & c_1 c_2 \\ c_3^2 e^{2i\gamma} & c_3^2 e^{-2i\gamma} \end{vmatrix}}\,,$$

e moltiplicando membro a membro

$$\begin{vmatrix} c_1 c_2 & c_1 c_2 \\ c_3^2 e^{2i\gamma} & c_3^2 e^{-2i\gamma} \end{vmatrix}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} \varrho^2 - (c_1^2 + c_2^2) & c_1 c_2 \\ 2(c_3^2 - 2r^2) & c_3^2 e^{-2i\gamma} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 c_2 & \varrho^2 - (c_1^2 + c_2^2) \\ c_3^2 e^{2i\gamma} & 2(c_3^2 - 2z^2) \end{vmatrix}\,,$$

che è appunto l'equazione cercata.

Svolgendo e riducendo si trova

$$\begin{aligned} 4c_1^2 c_2^2 c_3^4 \sin^2 2\gamma = c_3^4 [\varrho^2 - (c_1^2 + c_2^2)]^2 + 4c_1^2 c_2^2 (c_3^2 - 2z^2)^2 \\ - 4c_1 c_2 c_3^2 [\varrho^2 - (c_1^2 + c_2^2)] (c_3^2 - 2z^2) \cos 2\gamma\,. \end{aligned} \tag{11}$$

La superficie (11) è in generale di quarto ordine.

In casi particolari assume però delle forme ancora più semplici. Facendo

$$\gamma = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

risulta infatti

$$c_3^2 \varrho^2 \pm 4c_1 c_2 z^2 = c_3^2 (c_1 \pm c_2)^2\,.$$

Al segno superiore corrisponde un ellissoide di rivoluzione (intorno all'asse z), all'inferiore un iperboloide ad una falda, pure di rivoluzione (intorno al medesimo asse).

4. Nel caso particolare delle vibrazioni rettilinee si ritrovano naturalmente i risultati ottenuti nella Nota citata da principio.