ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

Matematica. — *Sull'operatore di Laplace per le omografie vettoriali.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli.

Matematica. — *Sulla trasformazione e sulla riduzione dei sistemi Hamiltoniani.* Nota di PIETRO BURGATTI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

1. Sia dato il sistema Hamiltoniano

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1\,, 2\,...\,n)\,. \tag{1}$$

Introducendo le nuove variabili ξ_i e η_i legate alle q e p dalle relazioni [1]

$$\xi_i = \xi_i(q\,;p) \qquad \eta_i = \eta_i(q\,;p) \qquad (i = 1\,, 2\,...\,n)\,, \tag{0}$$

il sistema (1) si trasforma in un altro, che in massima non ha più la forma Hamiltoniana. Affinchè la forma Hamiltoniana sia conservata nel sistema trasformato è necessario e basta che le (0) soddisfino alla condizione

$$\sum_i (\eta_i\, d\xi_i - p_i\, dq_i) = dV\,, \tag{2}$$

o alla sua equivalente

$$\sum_i (\eta_i\, d\xi_i + q_i\, dp_i) = dW\,. \tag{2'}$$

Quando questo avviene, diremo per brevità che le (0) rappresentano una *trasformazione canonica*.

Supponiamo che $\eta_n = \text{cost}$ sia un integrale del sistema (1). Allora è noto che il sistema trasformato mediante le (0) si riduce a $2n - 1$ equazioni; giacchè l'ennesima sarebbe semplicemente $\frac{d\eta_n}{dt} = 0$. Ma se quella trasformazione è canonica, il sistema trasformato si riduce ad un sistema con $2n - 2$ equazioni. Invero, indicando con H′ la trasformata di H, si ottiene

$$\frac{\partial H'}{\partial \xi_n} = \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi_n} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \xi_n} \right\}.$$

Ma, essendo per le (2) e (2′)

$$\frac{\partial q_i}{\partial \xi_n} = \frac{\partial \eta_n}{\partial p_i}\,, \quad \frac{\partial p_i}{\partial \xi_n} = -\frac{\partial \eta_n}{\partial q_i} \qquad (i = 1\,, 2\,..,\,n)\,,$$

[1] Userò in generale la forma abbreviata $\varphi(x\,;y)$ in luogo di $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n\,, y_1 y_2 \dots y_n)$.

risulta

$$\frac{\partial H'}{\partial \xi_n} = 0 ;$$

giacchè, per ipotesi, $\eta_n = \text{cost}$ è un integrale.

Dunque il sistema trasformato diventa

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots n-1)$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial \eta_n}, \quad \frac{d\eta_n}{dt} = 0,$$

ove H' è indipendente da ξ_n. Quindi, posto $\eta_n = \text{cost}$ in H', la ξ_n si ottiene per quadratura, integrato che sia il sistema delle prime $2n-2$ equazioni, il quale ha conservato la forma Hamiltoniana.

In seguito a queste osservazioni nasce la questione seguente: *Noto un integrale* $\eta_n(q\,;p) = \text{cost}$ *del sistema* (1), *determinare le trasformazioni* (0) *canoniche, in cui l'ennesima relazione* $\eta_n = \eta_n(q\,;p)$ *sia definita precisamente dall'integrale noto.* Operando una di queste trasformazioni, si ottiene la riduzione del sistema dato ad un sistema Hamiltoniano con $2n-2$ equazioni, nel senso spiegato di sopra.

Benchè in casi particolari (per es. nel problema dei tre corpi) questo problema sia stato implicitamente enunciato e indirettamente risoluto, nel caso generale non è stato, ch'io sappia, non dico risoluto, ma neppure enunciato in termini precisi. Ciò, a parer mio, lascia incompleta la bella teoria della trasformazione dei sistemi Hamiltoniani nel punto più importante; essendo manifesto che lo scopo ultimo di quella teoria è di valersi degli integrali conosciuti per ridurre il sistema a un minor grado di libertà, pur conservandogli la forma Hamiltoniana.

2. Il problema enunciato si risolve in un modo assai semplice. Consideriamo la trasformazione (0), ove

$$\eta_n = \eta_n(q\,;p) = \text{cost}$$

è un integrale conosciuto del sistema (1); e supponiamo che le prime n equazioni sieno risolubili rispetto alle p, per modo che la trasformazione stessa si possa scrivere sotto la forma

$$p_i = p_i(q\,;\xi)\ ,\ \eta_i = \eta_i\,(q\,;p(q\,;\xi)) = \varphi_i(q\,;\xi) \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Sarà

$$\frac{D(\xi_1\,\xi_2 \ldots \xi_n)}{D(p_1\,p_2 \ldots p_n)} \neq 0. \tag{e}$$

Affinchè sia canonica è necessario e basta che soddisfi alla (2); perciò dovrà risultare

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}\,, \quad \eta_i = -\frac{\partial V}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots n), \tag{3}$$

dove V è una funzione delle q e ξ. Ma questa funzione non può essere scelta ad arbitrio, perchè il secondo membro dell'ultima equazione di trasformazione, ossia $-\frac{\partial V}{\partial \xi_n}$, deve essere uguale a

$$\eta_n(q\,;p(q\,;\xi))\,;$$

la quale è conosciuta come funzione di p e q. Bisognerà dunque, in virtù delle prime n equazioni (3), che soddisfi l'equazione a derivate parziali

$$\eta_n\left(q\,;\frac{\partial V}{\partial q}\right) + \frac{\partial V}{\partial \xi_n} = 0\,. \tag{4}$$

Si conclude: *Determinata una funzione* $V(q_1\,q_2 \ldots q_n\,,\,\xi_1\,\xi_2 \ldots \xi_{n-1}\,\xi_n)$ *soddisfacente all'equazione* (4) (*ottenuta dall'integrale noto* $\eta_n(q\,;p) = \text{cost}$ *mediante la sostituzione di* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ *a* p_i *e di* $-\frac{\partial V}{\partial \xi_n}$ *alla costante del secondo membro*), *le formule* (3) *definiscono una trasformazione canonica, che riduce il sistema dato a un sistema Hamiltoniano con* $2n-2$ *equazioni.*

Si vede che le $\xi_1\,\xi_2 \ldots \xi_{n-1}$ compaiono nella V, considerata quale soluzione della (4), come costanti arbitrarie, e sono in numero di $n-1$. È facile comprendere che, per la forma particolare della (4), un'altra costante può sempre immaginarsi aggiunta alla variabile ξ_n. Dippiù la condizione (e) dà luogo a quest'altra condizione:

$$\frac{D\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\,\frac{\partial V}{\partial q_2} \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)}{\xi_1\,\xi_2 \ldots \xi_{n-1}\,\xi_n} \neq 0\,; \tag{5}$$

per conseguenza la funzione V del teorema precedente può ben chiamarsi un integrale completo della (4).

Il teorema dimostrato contiene in sè, come caso particolare un notissimo teorema di Jacobi. Invero, l'integrale $\eta_n(q\,;p) = \text{cost}$ sia $H = h$ (si suppone che H non contenga il tempo). La (4) diventa

$$H\left(q\,;\frac{\partial V}{\partial q}\right) + \frac{\partial V}{\partial \xi_n} = 0\,. \tag{6}$$

Sia $V(q\,;\xi)$ un integrale completo, come si è detto di sopra; allora le (3) riducono il sistema dato al seguente:

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\frac{\partial H'}{\partial\eta_i}\;,\quad \frac{d\eta_i}{dt}=-\frac{\partial H'}{\partial\xi_i}\qquad (1=1\,,2\,...\,n-1)$$

$$\frac{d\xi_n}{dt}=\frac{\partial H'}{\partial\eta_n}\,,\quad \frac{d\eta_n}{dt}=0\,,$$

ove H' è la trasformata di H. Ma, in virtù della (6), è chiaro che la trasformata di H è uguale alla trasformata di $-\dfrac{\partial V}{\partial\xi_n}$; quindi si riduce a η_n. Dopo ciò il precedente sistema diventa

$$\frac{d\xi_i}{dt}=0\quad,\quad \frac{d\eta_i}{dt}=0\qquad (i=1\,,2\,...\,n-1)$$

$$\frac{d\xi_n}{dt}=1\quad,\quad \frac{d\eta_n}{dt}=0\,;$$

il quale mostra che posto $\xi_n=t+\tau$ nelle (3), queste rappresentano gli integrali del sistema Hamiltoniano proposto.

È, nella sostanza, il teorema di Jacobi; ma sotto altra forma. La differenza consiste in questo: che nel sistema (3) comparisce esplicitamente l'integrale $H=h$ $\left(\text{equivalente a } \eta_n=-\dfrac{\partial V}{\partial\xi_n}\right)$, mentre nel sistema degli integrali di Jacobi quello non comparisce.

In alcuni casi può essere utile supporre le prime n equazioni (0) risolubili rispetto alle q, invece che rispetto alle p.

Con un ragionamento identico al precedente [1] (supposto sempre che $\eta_n=\text{cost}$ sia un integrale) si conclude, che noto un integrale completo $V(p_1\,p_2\,...\,p_n\;\;\xi_1\,\xi_2\,...\,\xi_{n-1}\,\xi_n)$ dell'equazione

$$(4')\qquad \eta_n\left(\frac{\partial V}{\partial p}\,;p\right)-\frac{\partial V}{\partial\xi_n}=0\,,$$

la trasformazione

$$(3')\qquad q_i=\frac{\partial V}{\partial p_i}\quad,\quad \eta_i=\frac{\partial V}{\partial\xi_i}$$

riduce il sistema dato ad un altro sistema Hamiltoniano con $2n-2$ equazioni.

3. Se gl'integrali nati fossero in numero di $m\,(\leq n)$, con m successive trasformazioni del tipo considerato si ridurrebbe il sistema dato un sistema

[1] Riferendosi alla (2') invece che alla (2).

Hamiltoniano con $2n - 2m$ equazioni. Ma è importante esaminare se sia possibile ottenere lo stesso risultato con una sola trasformazione.

Siano

$$\eta_n = \text{cost}\,,\ \eta_{n-1} = \text{cost}\,, \ldots ,\ \eta_{n-m+1} = \text{cost}$$

m integrali noti del sistema (1). Si vuol trovare una trasformazione canonica (0), tale che i secondi membri delle ultime m equazioni della trasformazione uguagliati a costanti coincidano rispettivamente con gl' integrali suaccennati.

Ragionando come al § 2, si vede subito che *le* (3) *rappresenteranno la trasformazione cercata quante volte la funzione*

$$V(q_1\, q_2 \ldots q_n\ \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_{n-m}\ \xi_{n-m+1}\, \xi_n)$$

soddisfi al sistema

$$\eta_{n-m+i}\left(q\,;\frac{\partial V}{\partial q}\right) + \frac{\partial V}{\partial \xi_{n-m+i}} = 0 \qquad (i = 1\,, 2 \ldots m) \tag{7}$$

e alla condizione (5). Anche qui le $\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_{n-m}$ compariscono come costanti arbitrarie. Per quanto fu osservato di sopra, altre m costanti si possono pensare addizionate rispettivamente alle variabili $\xi_{n-m+1} \ldots \xi_n$; onde quella V può chiamarsi un integrale completo delle (7). Allora, per cose note, si deduce subito che *la* V *esisterà quando gl'integrali dati sono in involuzione.*

Si conclude: *Noti m integrali del sistema* (1), *esso potrà ridursi ad un sistema Hamiltoniano con* $2n - 2m$ *equazioni mediante una sola trasformazione canonica, quando quegl'integrali sono in involuzione; nel caso contrario occorrono m successive trasformazioni.*

Considerazioni analoghe valgono scambiando le p con le q, come fu già osservato nel paragrafo precedente riguardo al caso d' un solo integrale.

Applicazione. — Supponiamo che il sistema dato (1) ammetta k integrali funzioni delle sole p; per esempio

$$P_i(p_1\, p_2 \ldots p_n) = \text{cost} \qquad (i = 1\,, 2 \ldots k)\,.$$

Il sistema

$$P_i = \frac{\partial V}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1\,, 2 \ldots k)$$

è soddisfatto da

$$V = \xi_1 P_1 + \xi_2 P_2 + \cdots + \xi_k P_k + U\,(p_1\, p_2 \ldots p_n\ \xi_{k+1} \ldots \xi_n)\,;$$

quindi la trasformazione

$$q_i = \sum_{s=1}^{k} \xi_s \frac{\partial P_s}{\partial p_i} + \frac{\partial U}{\partial p_i}\,, \quad \left\{\begin{array}{l} \eta_r = P_r \\ \eta_{k+m} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_{k+m}} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (i = 1\,, 2 \ldots n) \\ (r = 1\,, 2 \ldots k) \\ (m = 1\,, 2 \ldots n - k) \end{array} \tag{8}$$

riduce il sistema dato a un sistema Hamiltoniano con $2n - 2k$ equazioni.

Le (8) sono infinite, potendosi scegliere ad arbitrio la funzione U. In particolare si può prendere

$$V = \sum_{i=1}^{n} \xi_i P_i ,$$

essendo $P_{k+1} \dots P_n$ funzioni delle p, e operare la trasformazione

$$(8') \qquad q_i = \sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\partial P_s}{\partial p_i} \qquad \eta_i = P_i \qquad (i = 1, 2 \dots n) .$$

Nel problema degli n corpi esistono gl' integrali del centro di gravità, che sono precisamente funzioni delle sole p. Si può adunque adoperare una qualunque delle trasformazioni (8) o (8′) per ridurre il corrispondente sistema Hamiltoniano. Le (8′) contengono, come caso particolare, la trasformazione usata dal Poincaré nel problema dei tre corpi (¹).

Supponiamo infine, per fare un altro caso, che il sistema (1) (ove ora si suppone l' indice variabile da 1 a $3n$) ammetta un integrale della forma

$$\sum_{k=1}^{n-1} (q_{3k+1}\, p_{3k+2} - q_{3k+2}\, p_{3k+1}) = \text{cost.}$$

L'equazione

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \left(p_{3k+2} \frac{\partial V}{\partial p_{3k+1}} - p_{3k+1} \frac{\partial V}{\partial p_{3k+2}} \right) = \frac{\partial V}{\partial \xi_{3n}}$$

s' integra facilmente coi metodi elementari; quindi potremo determinare infinite trasformazioni canoniche atte a ridurre il sistema proposto. Si vede così la possibilità di ridurre l'equazioni Hamiltoniane del problema degli n corpi mediante gl' integrali delle aree, pur conservando loro la forma Hamiltoniana. Nel caso dei tre corpi la (8) conduce in particolare alla trasformazione usata dal Whittaker (²).

(¹) *Sur une forme nouvelle* ecc. C. R. dicembre 1896.
(²) A Treatise on the analytical Dynamics. Cap. XIII.