ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 7 agosto 1910.

Matematica. — *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori.* Nota II del Corrispondente G. Ricci.

Come ho osservato nella mia precedente Nota di egual titolo (¹) il problema di determinare una varietà V_n, date le rotazioni di una ennupla di congruenze ortogonali ad essa appartenente, ha la sua espressione analitica nel sistema di equazioni a derivate parziali di 1° ordine, che ivi ho designato con (A) (²); nel quale le γ_{hij} rappresentano le rotazioni date e le $\lambda_{i/r}$ gli elementi incogniti dei sistemi coordinati covarianti delle congruenze, di cui l'ennupla deve risultare.

In altri termini, varietà che corrispondono ai dati del problema esistono e si determinano mediante la effettiva integrazione del sistema (A), se esso è integrabile; non esistono nel caso opposto.

Intento di questa Nota è il portare un primo contributo allo studio delle condizioni di integrabilità del sistema (A) e quindi alla risoluzione dei problemi, ai quali nella precedente Nota ho accennato, ed il cui interesse per lo studio delle proprietà intrinseche degli iperspazî ho allora cercato di mettere in evidenza.

(¹) Cfr. questi Rendiconti, fascicolo del 20 febbraio 1910.

(²) La formola (A) deve essere corretta come segue

$$2\gamma_{hij} = \Sigma_{rs}\left\{ \overset{(r)}{\underset{i}{\lambda}} \overset{(s)}{\underset{j}{\lambda}} \left(\frac{\partial \lambda_{h/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{h/s}}{\partial x_r}\right) + \overset{(r)}{\underset{i}{\lambda}} \overset{(s)}{\underset{h}{\lambda}} \left(\frac{\partial \lambda_{j/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{j/s}}{\partial x_r}\right) + \overset{(r)}{\underset{j}{\lambda}} \overset{(s)}{\underset{h}{\lambda}} \left(\frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r}\right) \right\}.$$

Sono note e giova qui richiamare le relazioni tra i simboli di Riemann relativi ad una forma fondamentale

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s ,$$

che il Christoffel pose per primo in evidenza. Designando, come io soglio, con $a_{rs,tu}$ quei simboli si hanno le identità

$$(a)\qquad \begin{cases} a_{rs,tu} \equiv - a_{sr,tu} \\ a_{rs,tu} \equiv - a_{rs,ut} \end{cases}$$

$$(b)\qquad a_{rs,tu} + a_{ru,st} + a_{rt,us} \equiv 0$$

$$(c)\qquad a_{rt,us} \equiv a_{us,rt} .$$

Non è però stato osservato ed interessa per quanto segue di osservare che le (c) sono contenute nelle (b), come risulta combinando per addizione le (b) colle analoghe:

$$a_{sr,tu} + a_{su,rt} + a_{st,ur} \equiv 0$$

$$a_{tr,su} + a_{tu,rs} + a_{ts,ur} \equiv 0$$

$$a_{ur,st} + a_{ut,rs} + a_{us,tr} \equiv 0 .$$

Ricordo ([1]) ancora che, definita una V_n, secondo Riemann, mediante la forma fondamentale φ, se in essa si considera una ennupla di congruenze ortogonali rappresentate dai sistemi di equazioni simultanee

$$\frac{dx_r}{ds} = \lambda_h^{(r)} ,$$

le rotazioni della ennupla sono definite dalle posizioni

$$\lambda_{h/rs} = \Sigma_{ij}\, \gamma_{hij}\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{j/s} ,$$

le quali, posto

$$(1)\qquad \gamma_{hi,kj} = \frac{\partial \gamma_{hik}}{\partial s_j} - \frac{\partial \gamma_{hij}}{\partial s_k} + \Sigma_g\, \gamma_{hig}(\gamma_{gkj} - \gamma_{gjk}) + \Sigma_g(\gamma_{ghj}\,\gamma_{gik} - \gamma_{ghk}\,\gamma_{gij}) ,$$

per derivazione ed eliminazione delle derivate delle $\lambda_{h/r}$ conducono alle

$$(2)\qquad \gamma_{hi,kj} = \Sigma_{prqs}\, a_{pr,qs}\, \lambda_h^{(p)}\, \lambda_k^{(q)}\, \lambda_i^{(r)}\, \lambda_j^{(s)} .$$

([1]) Cfr. Ricci, *Sui sistemi di congruenze ortogonali* ecc., § I. Memorie della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. II.

Mentre poi, tenuto conto delle relazioni

$$(3) \qquad \gamma_{hik} + \gamma_{ihk} = 0 ,$$

dalle (1) seguono le identità

$$(\alpha) \qquad \gamma_{hi,kj} = -\gamma_{ih,kj} \quad , \quad \gamma_{hi,kj} = -\gamma_{hi,jk}$$

analoghe alle (a), tenendo conto delle (b) si perviene alle equazioni

$$(\beta) \qquad \gamma_{hi,kj} + \gamma_{hj,ik} + \gamma_{hk,ji} = 0 ,$$

che sono algebriche nelle $\lambda_h^{(r)}$ e di primo ordine nelle rotazioni della ennupla. Dalle (α) e (β) seguono poi le

$$\gamma_{hi,kj} = \gamma_{kj,hi} ,$$

le quali anzi nel caso di $n = 3$ assorbono tutte le (β).

Si osservi che, posto

$$(4) \qquad 2\delta_{ihk} = \gamma_{ihk} - \gamma_{ikh} ,$$

si possono reciprocamente esprimere le γ_{ihk} per le δ_{ihk}, poichè, tenuto conto anche delle (3), si hanno le

$$(4') \qquad \gamma_{ihk} = \delta_{ihk} + \delta_{hki} + \delta_{khi} .$$

Alle rotazioni della ennupla ortogonale considerata si sostituiscono così le curvature geodetiche rappresentate dalle δ_{iik} raddoppiate e le anormalità rappresentate dalle δ_{ihk} quando gli indici i, h, k siano fra loro distinti. Per questa sostituzione le (β) assumono la forma

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{\partial \delta_{hik}}{\partial s_g} + \frac{\partial \delta_{hgi}}{\partial s_k} + \frac{\partial \delta_{hkg}}{\partial s_i} = 2\Sigma_j (\delta_{hij}\, \delta_{jgk} + \delta_{hgj}\, \delta_{jki} + \delta_{hkj}\, \delta_{jig}) .$$

1. Dimostreremo ora che si perviene al sistema (B) derivando il sistema (A), eliminando dal sistema così ottenuto le derivate seconde delle funzioni incognite $\lambda_{h/r}$ e tenendo conto del sistema primitivo.

Se a questo si dà la forma equivalente

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \frac{\partial \lambda_{h/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{h/s}}{\partial x_r} = 2\Sigma_{ij}\, \delta_{hij}\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{j/s} ,$$

si riconosce che gli si può sostituire il sistema

$$(\mathrm{A}_2) \qquad 2\frac{\partial \lambda_{h/r}}{\partial x_s} = \Sigma_{ij}\, \beta_{hij}\, \mu_{ij/rs} + \Sigma_{ij}\, \gamma_{hij}\, \delta_{ij/rs} ,$$

ponendo

$$\mu_{ij/rs} = \lambda_{i/r}\, \lambda_{j/s} + \lambda_{i/s}\, \lambda_{j/r}$$
$$\delta_{ij/rs} = \lambda_{i/r}\, \lambda_{j/s} - \lambda_{i/s}\, \lambda_{j/r} ,$$

e rappresentando con

(5) $$\beta_{hij} = \beta_{hji}$$

$\dfrac{n^2(n+1)}{2}$ indeterminate.

Posto

(6) $$\alpha_{igl} = \beta_{igl} + \gamma_{igl}\,,$$

se, derivate le (A_2), si eliminano le derivate seconde delle $\lambda_{h|r}$, si giunge ad un sistema di equazioni, il quale può essere sostituito col seguente

(7) $$\left\{\begin{aligned} 2\left(\frac{\partial \alpha_{hfk}}{\partial s_g} - \frac{\partial \alpha_{hfg}}{\partial s_k}\right) &= \Sigma_{ij}\,\gamma_{hij}\,\Sigma_{rst}\left(\frac{\partial \delta_{ij|rs}}{\partial x_t} - \frac{\partial \delta_{ij|rt}}{\partial x_s}\right)\lambda_f^{(r)}\,\lambda_g^{(s)}\,\lambda_k^{(t)} \\ &+ \Sigma_{ij}\,\beta_{hij}\,\Sigma_{rst}\left(\frac{\partial \mu_{ij|rs}}{\partial x_t} - \frac{\partial \mu_{ij|rt}}{\partial x_s}\right)\lambda_f^{(r)}\,\lambda_g^{(s)}\,\lambda_k^{(t)}\,. \end{aligned}\right.$$

Posto poi ancora

$$\vartheta_{ij|rst} = \lambda_{i|r}\,\Sigma_{lg}\,\gamma_{jlg}\,\delta_{lg|st}$$
$$\nu_{ij|rst} = \Sigma_{lg}\,\alpha_{igl}\,\lambda_{g|r}\,\delta_{jl|st}\,,$$

eliminando per mezzo delle (A_2) le derivate prime delle $\lambda_{h|r}$ si ottengono le

$$\frac{\partial \mu_{ij|rs}}{\partial x_t} - \frac{\partial \mu_{ij|rt}}{\partial x_s} = \vartheta_{ij|rst} + \vartheta_{ji|rst} + \nu_{ij|rst} + \nu_{ji|rst}$$

$$\frac{\partial \delta_{ij|rs}}{\partial x_t} - \frac{\partial \delta_{ij|rt}}{\partial x_s} = \vartheta_{ij|rst} - \vartheta_{ji|rst} + \nu_{ij|rst} - \nu_{ji|rst}\,,$$

per le quali dalle (7) si passa finalmente alle

(8) $$\frac{\partial \alpha_{hfk}}{\partial s_g} - \frac{\partial \alpha_{hfg}}{\partial s_k} = 2\sum_i \alpha_{hfi}\,\delta_{igk} + \sum_i (\alpha_{hig}\,\alpha_{ifk} - \alpha_{hik}\,\alpha_{ifg})\,.$$

Se tra queste equazioni, a cui siamo giunti operando sulle (A_2), invece che sulle (A_1), eliminiamo le indeterminate ausiliarie β_{hij}, otteniamo il sistema di equazioni, a cui saremmo pervenuti operando direttamente sulle (A_1) stesse. Ora dalle (4) e (6) (ponendo mente anche alle (**3**) e (5)) seguono le

$$\alpha_{ihk} - \alpha_{ikh} = 2\,\delta_{ihk}$$
$$a_{ihk} + a_{ikh} = 2\,\beta_{ihk}\,;$$

le quali ci dicono che per eliminare tra le (8) le β_{ihk} conviene combinarle fra loro in modo che nelle equazioni risultanti appaiano soltanto le differenze $\alpha_{ihk} - \alpha_{ikh}$; e partendo da questa osservazione e avendo presenti soltanto i primi membri delle (7) si giunge subito alle (B).

Notiamo che queste sono in numero di $\dfrac{n^2(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}$, poichè i loro primi membri cambiano semplicemente di segno scambiando fra loro due degli indici i, k, g.

2. Se le rotazioni γ_{hik} sono costanti, le (B) non contengono le funzioni incognite e rappresentano quindi delle condizioni necessarie perchè esistano delle V_n, in cui si possa tracciare una ennupla di congruenze ortogonali, per le quali le rotazioni abbiano valori costanti dati.

Applicando un noto teorema del sig. Riquier [1] si può dimostrare che le dette condizioni sono anche sufficienti; poichè, nel caso delle rotazioni costanti, l'essere soddisfatte le condizioni (B) importa che il sistema (A_1) è *passivo*; e si dimostra poi facilmente che esso è anche *ortonomo*. Perciò basta attribuire a ciascuna variabile una sola quota, la quale per le variabili indipendenti deve assumersi eguale ad 1 e per le funzioni $\lambda_{h/p}$ si assumerà eguale a p. Imaginando risoluta ogni equazione (A_1) rispetto a $\frac{\partial \lambda_{h/r}}{\partial x_s}$ nella ipotesi che sia $s > r$, mentre la quota del primo membro risulta eguale ad $s+1$, nel secondo membro incontriamo soltanto le quote r, s ed $r+1$ tutte minori di $s+1$.

3. Se in una V_n definita intrinsecamente mediante una forma fondamentale φ si considera una ennupla ortogonale di congruenze di sistemi coordinati covarianti $\lambda_{h/r}$, i sistemi covarianti delle congruenze di ogni altra ennupla ortogonale si ottengono ponendo

$$\mu_{h/r} = \Sigma_k c_{hk} \lambda_{k/r},$$

con c_{hk} rappresentando i coefficienti della sostituzione generale ortogonale di ordine n.

Come risulta dalle (2), per queste posizioni gli invarianti $\gamma_{hi,kj}$ definiti dalle (1) vengono sostituiti da altri, $\gamma'_{hi,kj}$, legati ad essi dalle relazioni

$$\gamma'_{hi,kj} = \sum_{h'i'k'j'} c_{hh'} c_{kk'} c_{ii'} c_{jj'} \gamma_{h'i',k'j'}.$$

Posto poi

$$\gamma_{h'k'} = \sum_{i'} \gamma_{h'i',k'i'} \quad , \quad \gamma'_{hk} = \sum_i \gamma'_{hi,ki},$$

dalle precedenti seguono le

$$\gamma'_{hk} = \Sigma_{h'k'} \gamma_{h'k'} c_{hh'} c_{kk'}.$$

E se si ricorda [2] che per ogni V_n le congruenze principali sono caratterizzate dalle condizioni

$$\gamma_{hk} = 0 \text{ (per } h \neq k),$$

[1] *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.* Paris, Gauthier-Villars, 1910, paragrafo 115.

[2] Cfr. Ricci, *Direzioni ed invarianti principali in una varietà qualunque.* Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, tomo LXIII, parte 2ª.

e che, soddisfatte queste, le γ_{hh} rappresentano gli invarianti principali di V_n, si riconosce che le ennuple principali di una V_n si ottengono riducendo, mediante sostituzioni ortogonali, a forma canonica la quadrica di coefficienti γ_{hk}.

Da ciò e da quanto è stato esposto nei paragrafi precedenti, poichè per le (1) le $\gamma_{hi,kj}$ e quindi le γ_{hk} risultano costanti, quando lo sono le rotazioni, segue che:

Per ogni V_n dotata di ennuple ortogonali A a rotazioni costanti:

1°) Gli invarianti principali sono costanti.

2°) Le linee delle congruenze principali hanno inclinazioni costanti su quelle delle ennuple A; e sono esse stesse a rotazioni costanti.

Geologia — *Sull'opportunità di un completo istituto Vesuviano*. Nota del Socio Carlo De Stefani.

Penso non sia disdicevole alla principale istituzione scientifica d'Italia l'intrattenersi sopra un argomento che interessa non soltanto la scienza ma direi pure la reputazione del nostro paese; intendo dell'Osservatorio Vesuviano.

È il Vesuvio, fra tutti i vulcani del mondo, quello la cui storia è meglio nota e quello sul quale si ha il più straordinario numero di pubblicazioni. Per quanto modestamente grandioso, esso è un vulcano di gabinetto; è oggi fra tutti i vulcani il più comodamente accessibile. Attiguo ad una capitalissima città sede d'ogni buono studio, è agevole ad avvicinarsi ed a percorrersi e trovasi in sostanza nel bel centro della civiltà europea.

La sua attività, con tutte le forme che variamente possono alternare in una regione vulcanica, non cessa mai.

Se un vulcano, sto per dire così comodo, si trovasse al Giappone, nell'America settentrionale od in qualsiasi degli altri Stati d'Europa, non metto dubbio che avrebbe per compagnia un Osservatorio fornito di quanto la scienza oggi esige per compiere gli studî relativi ad un vulcano; e se un sentimento nobile, per quanto poco giustificabile di fronte alla scienza, non lo vietasse, potremmo ben accettare la proposta di un completo e grandioso istituto internazionale fornito di tutti i mezzi atti allo scopo. Pure, se non vogliamo ingerenze turbatrici di estranei, ci converrà far qualche cosa più di quello che facciamo oggi.

Vero è che gli ostacoli finanziarî si oppongono all'immediata e completa soddisfazione dei desideri e spesso anche dei bisogni più urgenti e più giusti; pur son di parere che, determinata per tempo l'idea, questa possa, sotto gli auspicî dell'Accademia, meno tardivamente passare al concreto.