ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 marzo 1892.

F. Brioschi Presidente

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo.* Nota di G. Morera, presentata dal Socio Beltrami.

« Per trovare la soluzione più generale del sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=X\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=Y\\ \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=Z\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$Y_z=Z_y\,;\;Z_x=X_z\,;\;X_y=Y_x\,,\qquad(2)$$

dove X, Y, Z indicano tre funzioni date di x, y, z, basta evidentemente trovare quella delle equazioni stesse nelle quali siasi posto: $X=Y=Z=0$.

« La soluzione più generale dell'equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

è:

$$P=\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y},\quad Q=\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z},\quad R=\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x},$$

dove U, V, W denotano tre funzioni arbitrarie.

« Alle equazioni che si deducono da (1) facendovi $X = Y = Z = 0$ si soddisferà adunque nel modo più generale ponendo:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial y}; \quad X_y = \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z}; \quad X_z = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ Y_x &= \frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial y}; \quad Y_y = \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial z}; \quad Y_z = \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ Z_x &= \frac{\partial v_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial y}; \quad Z_y = \frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial z}; \quad Z_z = \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \end{aligned}\right\}, \qquad (1')$$

dove u_i, v_i, w_i $(i = 1, 2, 3)$ designano nove funzioni arbitrarie.

« Ma a cagione delle (2) queste nove funzioni devono soddisfare alle tre seguenti equazioni alle derivate parziali:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} &= \frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial z} &= \frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial y} \end{aligned}\right\},$$

le quali si possono scrivere:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial (v_2 + w_3)}{\partial x} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \\ \frac{\partial (w_3 + u_1)}{\partial y} &= \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial (u_1 + v_3)}{\partial z} &= \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \end{aligned}\right\} (3)$$

« Ora qualunque sieno u_2, u_3; v_3, v_1; w_1, w_2 si può sempre porre:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \frac{\partial F_{12}}{\partial x}, \quad u_3 = \frac{\partial F_{13}}{\partial x} \\ v_3 &= \frac{\partial F_{23}}{\partial y}, \quad v_1 = \frac{\partial F_{21}}{\partial y} \\ w_1 &= \frac{\partial F_{31}}{\partial z}, \quad w_2 = \frac{\partial F_{32}}{\partial z} \end{aligned}\right\} (4)$$

dove: F_{12}, F_{13} sono funzioni determinate a meno di funzioni arbitrarie di y e z; ecc. Integrando le (3) si avrà quindi:

$$\left.\begin{aligned} v_2 + w_3 &= \frac{\partial F_{12}}{\partial y} + \frac{\partial F_{13}}{\partial z} \\ w_3 + u_1 &= \frac{\partial F_{23}}{\partial z} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x} \\ u_1 + v_2 &= \frac{\partial F_{31}}{\partial x} + \frac{\partial F_{32}}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

e nei due ultimi gruppi di relazioni le F_{ik} designano, in ultima analisi, delle funzioni affatto arbitrarie.

« Dalle tre ultime equazioni si ha ovviamente:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(F_{21}+F_{31})+\frac{\partial}{\partial y}(F_{32}-F_{12})+\frac{\partial}{\partial z}(F_{23}-F_{13})\right\} \\ v_2 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(F_{32}+F_{12})+\frac{\partial}{\partial z}(F_{13}-F_{23})+\frac{\partial}{\partial x}(F_{31}-F_{21})\right\} \\ w_3 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(F_{13}+F_{23})+\frac{\partial}{\partial x}(F_{21}-F_{31})+\frac{\partial}{\partial y}(F_{12}-F_{32})\right\} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

e però le (4) e (5), dove si ritengano arbitrarie le funzioni F_{ik}, risolvono nel modo più generale la questione.

« Abbiamo così immediatamente dalle (1'):

$$X_x = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(F_{21}-F_{31})\,;\ \ldots\ldots$$

$$Y_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(F_{21}-F_{31})+\frac{\partial}{\partial y}(F_{12}-F_{32})+\frac{\partial}{\partial z}(F_{23}-F_{13})\right\};\ldots..$$

e quindi posto:

$$F_{21}-F_{31}=U\,,\qquad F_{32}-F_{12}=V\,,\qquad F_{13}-F_{23}=W$$

avremo come soluzione più generale del sistema (1) (2) per $X=Y=Z=0$:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\ ;\quad Y_z = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial z}\right) \\ Y_y &= \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\ ;\quad Z_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial x}\right) \\ Z_z &= \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\ ;\quad X_y = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\},$$

dove U, V, W indicano tre funzioni arbitrarie.

« Se le tre funzioni X, Y, Z sono qualunque una soluzione particolare di (1) e (2) è manifestamente:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \int X\,dx\ ;\quad Y_z = 0 \\ Y_y &= \int Y\,dy\ ;\quad Z_x = 0 \\ Z_z &= \int Z\,dz\ ;\quad X_y = 0 \end{aligned}\right\}$$

e però la soluzione più generale delle (1) e (2) è:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= \int X\,dx + \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}; & Y_z &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z}\right)\\
Y_y &= \int Y\,dy + \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}; & Z_x &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x}\right)\\
Z_z &= \int Z\,dz + \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}; & X_y &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}.$$

« Queste formule mostrano che uno stesso campo di forza si può generare in una infinità di modi differenti colle pressioni di un mezzo continuo.

« Un corpo continuo può essere in equilibrio, pur non essendo nulle le pressioni interne, senza l'intervento di forze esterne, come avviene, per esempio, in un solido elastico ordinario, inegualmente riscaldato.

« Infatti, se $X = Y = Z = 0$ le tre funzioni arbitrarie U, V, W si possono sempre concepire determinate in guisa che su tutta la superficie del corpo si abbia:

$$\left.\begin{aligned}
X_x \frac{\partial x}{\partial n} + X_y \frac{\partial y}{\partial n} + X_z \frac{\partial z}{\partial n} &= 0\\
Y_x \frac{\partial x}{\partial n} + Y_y \frac{\partial y}{\partial n} + Y_z \frac{\partial z}{\partial n} &= 0\\
Z_x \frac{\partial x}{\partial n} + Z_y \frac{\partial y}{\partial n} + Z_z \frac{\partial z}{\partial n} &= 0
\end{aligned}\right\},$$

dove col simbolo n si designa la direzione della normale interna alla superficie stessa. Anzi la determinazione delle tre funzioni arbitrarie, in conformità delle precedenti condizioni, si può di regola fare in infiniti modi differenti.

« Esaminiamo il caso in cui U, V, W sieno funzioni della sola distanza $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ del punto (x, y, z) dall'origine delle coordinate.

« Allora posto:

$$R_1 = \frac{1}{r}\frac{dU}{dr}; \quad R_2 = \frac{1}{r}\frac{dV}{dr}; \quad R_3 = \frac{1}{r}\frac{dW}{dr},$$

si ha facilmente:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = R_1 + \frac{x^2}{r}\frac{dR_1}{dr}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{xy}{r}\frac{dR_1}{dr}; \text{ ecc.},$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= \frac{yz}{r}\frac{dR_1}{dr}; & Y_z &= \frac{1}{2}R_1 + \frac{x}{2r}\left(x\frac{dR_1}{dr} - y\frac{dR_2}{dr} - z\frac{dR_3}{dr}\right)\\
Y_y &= \frac{zx}{r}\frac{dR_2}{dr}; & Z_x &= \frac{1}{2}R_2 + \frac{y}{2r}\left(y\frac{dR_2}{dr} - z\frac{dR_3}{dr} - x\frac{dR_1}{dr}\right)\\
Z_z &= \frac{xy}{r}\frac{dR_3}{dr}; & Xy &= \frac{1}{2}R_3 + \frac{z}{2r}\left(z\frac{dR_3}{dr} - x\frac{dR_1}{dr} - y\frac{dR_2}{dr}\right)
\end{aligned}\right\}.$$

« Le componenti X_n, Y_n, Z_n della pressione unitaria esercitata sull'elemento della superficie sferica di raggio r, circostante al punto (x, y, r), sono, in base a formule generali notissime:

$$X_n = -\left(X_x \frac{x}{r} + X_y \frac{y}{r} + X_z \frac{z}{r}\right) = -\frac{yR_3 + zR_2}{2r};$$

$$Y_n = -\frac{zR_1 + xR_3}{2r};$$

$$Z_n = -\frac{xR_2 + yR_1}{2r}.$$

« Coll'uso di queste formule si vede tosto che se il corpo è limitato da due sfere concentriche di raggi r_1, r_2, basta assumere per R_1, R_2, R_3 tre funzioni della distanza r dal centro, le quali si annullano tanto per $r = r_1$ quanto per $r = r_2$, per aver risoluto il problema dell'equilibrio dell'involucro senza l'intervento di pressioni superficiali esterne e di forze diffuse sulla sua massa. A tal uopo basterà adunque assumere:

$$R_i = \left\{ \varphi_i(r_2) - \varphi_i(r) \right\} \left\{ \psi_i(r) - \psi_i(r_1) \right\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

dove le $\varphi_i(r)$, $\psi_i(r)$ sono funzioni qualunque, purchè finite e continue nell'intervallo (r_1, r_2) ».

Fisica matematica. — *Osservazioni sulla Nota precedente;* del Socio Eugenio Beltrami.

« È noto che rappresentando con

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \lambda = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \mu = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \nu = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

le sei componenti della deformazione corrispondente ad un sistema di spostamenti (u, v, w), queste sei funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, supposte date *a priori*, devono soddisfare a sei condizioni necessarie e sufficienti perchè sia possibile la conseguente determinazione di tre funzioni u, v, w, dalle quali esse dipendano giusta le formole precedenti. Queste sei condizioni sono:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

dove

$$A = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}, \text{ ecc.}$$

$$L = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y\, \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right), \text{ ecc.}$$