ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

« Le componenti X_n, Y_n, Z_n della pressione unitaria esercitata sull'elemento della superficie sferica di raggio r, circostante al punto (x, y, r), sono, in base a formule generali notissime:

$$X_n = -\left(X_x \frac{x}{r} + X_y \frac{y}{r} + X_z \frac{z}{r}\right) = -\frac{yR_3 + zR_2}{2r};$$

$$Y_n = -\frac{zR_1 + xR_3}{2r};$$

$$Z_n = -\frac{xR_2 + yR_1}{2r}.$$

« Coll'uso di queste formule si vede tosto che se il corpo è limitato da due sfere concentriche di raggi r_1, r_2, basta assumere per R_1, R_2, R_3 tre funzioni della distanza r dal centro, le quali si annullano tanto per $r = r_1$ quanto per $r = r_2$, per aver risoluto il problema dell'equilibrio dell'involucro senza l'intervento di pressioni superficiali esterne e di forze diffuse sulla sua massa. A tal uopo basterà adunque assumere:

$$R_i = \left\{\varphi_i(r_2) - \varphi_i(r)\right\}\left\{\psi_i(r) - \psi_i(r_1)\right\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

dove le $\varphi_i(r)$, $\psi_i(r)$ sono funzioni qualunque, purchè finite e continue nell'intervallo (r_1, r_2) ».

Fisica matematica. — *Osservazioni sulla Nota precedente*; del Socio Eugenio Beltrami.

« È noto che rappresentando con

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \lambda = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \mu = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \nu = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

le sei componenti della deformazione corrispondente ad un sistema di spostamenti (u, v, w), queste sei funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, supposte date *a priori*, devono soddisfare a sei condizioni necessarie e sufficienti perchè sia possibile la conseguente determinazione di tre funzioni u, v, w, dalle quali esse dipendano giusta le formole precedenti. Queste sei condizioni sono:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

dove

$$A = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}, \text{ ecc.}$$

$$L = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y\, \partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right), \text{ ecc.}$$

« Ciò premesso è facile verificare che fra queste ultime sei espressioni A, B, C, L, M, N sussistono le seguenti tre relazioni identiche (1):

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Poichè dunque queste relazioni hanno la stessa forma delle equazioni indefinite d'equilibrio d'un corpo continuo sottratto ad ogni azione esterna, è lecito soddisfare a queste equazioni ponendo:

$$X_x = A, \quad Y_y = B, \quad Z_z = C,$$
$$Y_z = L, \quad Z_x = M, \quad X_y = N$$

e prendendo per $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ *sei* funzioni di x, y, z *interamente arbitrarie*.

« La soluzione ottenuta per altra via dal prof. Morera corrisponde alle ipotesi particolari:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0; \qquad \lambda = U, \quad \mu = V, \quad \nu = W.$$

« Le sei componenti di pressione $X_x, X_y, \ldots$ sono necessariamente soggette a certe condizioni, quando corrispondono a forze interne generate per pura deformazione; giacchè esse devono in tal caso potersi esprimere, in un modo del tutto determinato (e dipendente dalla natura del corpo), per mezzo di tre componenti di spostamento u, v, w. Nel caso dell'isotropìa, queste condizioni, immediata conseguenza di quelle che ho accennato più sopra, sono estremamente semplici; esse hanno infatti la forma seguente:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + C\,\Delta_2 X_x = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + C\,\Delta_2 Y_y = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + C\,\Delta_2 Z_z = 0,$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} + C\,\Delta_2 Y_z = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial x} + C\,\Delta_2 Z_x = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + C\,\Delta_2 X_y = 0,$$

dove

$$P = X_x + Y_y + Z_z$$

e dove C è una costante (e propriamente $C = 1 + \eta$, dove η è il noto *rapporto di contrazione*, così designato nella traduzione francese del trattato di Clebsch).

« Queste ultime condizioni suppongono l'assenza d'ogni forza esterna. Tralascio, per brevità, di riportare le condizioni analoghe per il caso in cui questa forza esista ed abbia le componenti X, Y, Z ».

(1) Queste relazioni ripetono la loro origine da quella notissima che lega fra loro le tre componenti di rotazione; giacchè, come ho stabilito in una Nota addizionale alla mia Memoria *Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell*, le ricordate sei condizioni $A = 0$, ecc. non sono altro che condizioni d'integrabilità dei differenziali di quelle componenti.