ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell'8 maggio 1892.

F. Brioschi Presidente

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Paleontologia. — *Un Delfinoide miocenico, ossia il supposto uomo fossile di Acquabona presso Arcevia nelle Marche.* Nota del Socio prof. G. Capellini.

Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle forme differenziali lineari.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

« 1. Indico con $\varphi(t)$ una funzione analitica qualunque della variabile t, con φ', φ'',... le sue derivate successive, con f_p un polinomio razionale intero in t il cui grado è indicato dall'indice. Chiamo poi *forma differenziale lineare normale dell'ordine p* l'espressione:

$$(1) \qquad \Delta = f_p \varphi^{(p)} + f_{p-1} \varphi^{(p-1)} + \cdots + f_1 \varphi' + f_0 \varphi,$$

e definisco su queste forme le due seguenti operazioni. La prima, che rappresento con D, consiste nel dedurre da D la nuova forma differenziale lineare

$$D^2 \Delta = f'_p \varphi^{(p-2)} + f'_{p-1} \varphi^{(p-2)} + \cdots + f'_1 \varphi,$$

pure normale, ma dell'ordine $p-1$; iterando questa operazione si hanno le forme

$$D^2 \varDelta = f_p'' \varphi^{(p-2)} + f_{p-1}'' \varphi^{(p-3)} + \cdots + f_2'' \varphi ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^p \varDelta = f_p^{(p)} \varphi .$$

« La seconda operazione, che rappresento con S_ϱ, viene definita da

$$S_\varrho \varDelta = \varDelta + \varrho D\varDelta + \binom{\varrho}{2} D^2 \varDelta + \cdots + \binom{\varrho}{p} D^p \varDelta ,$$

dove al solito $\binom{\varrho}{p}$ è il coefficiente binomiale

$$\binom{\varrho}{p} = \frac{\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-p+1)}{1.2.3\ldots p} .$$

« La S_ϱ è evidentemente una forma differenziale lineare normale dell'ordine p e si può anche scrivere:

$$S_\varrho \varDelta = f_p \varphi^{(p)} + \left(f_{p-1} + \varrho f_p'\right) \varphi^{(p-1)} + \left(f_{p-2} + \varrho f_{p-1}' + \binom{\varrho}{2} f_{p-2}''\right) \varphi^{(p-2)} + \cdots$$

$$\cdots + \left(f_0 + \varrho f_1' + \binom{\varrho}{2} f_2'' + \cdots + \binom{\varrho}{p} f_p^{(p)}\right) \varphi .$$

« 2. Le operazioni D e S_ϱ sono ambedue distributive. Esse sono di più commutabili fra loro; infatti applicando l'operazione D all'ultima formola, viene

$$DS_\varrho \varDelta = f_p' \varphi^{(p-1)} + \left(f_{p-1}' + \varrho f_p''\right) \varphi^{(p-2)} + \cdots + \left(f_1' + \varrho f_2'' + \cdots + \binom{\varrho}{p-1} f_p^{(p)}\right) \varphi ,$$

che non è altro che il risultato dell'operazione S_ϱ applicata alla forma $D\varDelta$.

« L'operazione S_ϱ gode inoltre della proprietà espressa dalla formula

$$S_\sigma S_\varrho = S_{\varrho+\sigma} ;$$

infatti

$$S_\sigma S_\varrho = S_\sigma \left\{ \varDelta + \varrho D\varDelta + \binom{\varrho}{2} D^2 \varDelta + \cdots + \binom{\varrho}{p} D^p \varDelta \right\}$$

$$= \varDelta + \varrho D\varDelta + \binom{\varrho}{2} D^2 \varDelta + \cdots \binom{\varrho}{p} D^p \varDelta$$

$$+ \sigma \left(D\varDelta + \varrho D^2 \varDelta + \binom{\varrho}{2} D^3 \varDelta + \cdots + \binom{\varrho}{p-1} D^p \varDelta \right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \binom{\sigma}{p} D^p \varDelta ,$$

e per la proprietà dei coefficienti binomiali:

$$S_\sigma S_\varrho \varDelta = \varDelta + (\varrho+\sigma) D\varDelta + \binom{\varrho+\sigma}{2} D^2 \varDelta + \cdots + \binom{\varrho+\sigma}{p} D^p \varDelta = S_{\varrho+\sigma} \varDelta ,$$

c.d.d.

« Viene da ciò che nel simbolo operatorio S_ρ la quantità ϱ si comporta come un esponente. In particolare, $S_0 \Delta = \Delta$, il che si può indicare simbolicamente con $S_0 = 1$; e se una forma Δ_1 si deduce da Δ mediante la S_ρ, Δ si ottiene da Δ_1 mediante la $S_{-\rho}$; cioè $S_\rho S_{-\rho} = 1$.

« 3. Consideriamo ora l'equazione $\Delta = 0$. Essa è regolare ed ammette $p+1$ punti singolari, che sono le radici di $f = 0$ ed il punto $t = \infty$; la diremo *equazione normale* del p^{mo} ordine. L'equazione trasformata da questa per mezzo dell'operazione S_ρ è pure regolare ed ha i medesimi punti singolari; ora dico che l'integrazione di una delle equazioni $\Delta = 0$, $S_\rho \Delta = 0$ porta con se quella dell'altra. Sia infatti $\varphi(t)$ un integrale della $\Delta = 0$, sia poi λ una linea d'integrazione tale che se è aperta, $\varphi(t)$ e le sue prime p derivate si annullino alle sue estremità, e se è chiusa, $\varphi(t)$ riprenda lo stesso valore quando la variabile dopo di avere percorsa la linea λ torna al punto di partenza. Sia x un valore il cui punto rappresentativo non è sulla linea λ se aperta, e non è sulla linea λ nè nel suo interno se chiusa. Posto allora

$$\psi(x) = \int_\lambda \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\varrho+1}}, \tag{2}$$

si moltiplichi l'identità

$$f_h(t) = f_h(x) + (t-x) f'_h(x) + \frac{(t-x)^2}{1.2} f''_h(x) + \cdots \frac{(t-x)^h}{h!} f_h^{(h)}(x)$$

per $\varphi^{(h)}(t)(t-x)^{-\varrho-1}\,dt$ e si integri lungo λ, applicando l'integrazione per parti: si giunge così senza difficoltà alla formola:

$$\int_\lambda^{(h)} \frac{\varphi(t) f_h(t)\,dt}{(t-x)^{\varrho+1}} = S_\rho f_h \psi^{(h)};$$

onde

$$\int_\lambda \frac{\Delta\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\varrho+1}} = S_\rho \Delta.$$

« Se dunque φ è integrale dell'equazione $\Delta = 0$, la ψ, trasformata di φ secondo la formola di trasformazione (2), sarà integrale dell'equazione $S_\rho \Delta = 0$. L'integrazione di un'equazione differenziale lineare omogenea, regolare, normale $\Delta = 0$, porta dunque con sè l'integrazione di tutte le equazioni comprese nella formola $S_\rho \Delta = 0$ per qualunque valore di ϱ.

« Questo principio si presta a notevoli applicazioni, come vedremo più sotto. Giova notare come le proprietà $S_\rho S_{-\rho} = 1$ permetta d'*invertire* subito l'integrale definito (2) [1].

[1] Alla trasformazione funzionale (2) si potrebbe dare il nome di trasformazione di *Pochhammer*, per l'uso che ne fa questo Autore nello studio delle equazioni ipergeometriche generalizzate con due punti singolari. (J. di Crelle, t. CII).

« 4. Sia α uno dei punti singolari dell'equazione $\Delta = 0$, e sia esso una radice dell'ordine h di multiplicità dell'equazione $f_p = 0$. L'equazione determinante corrispondente, che ammette come radici gli esponenti r di diramazione dell'equazione $\Delta = 0$ nel punto α, è

$$(3) \quad \binom{r-p+h}{h} f_p^{(h)}(\alpha) + \binom{r-p+h}{h-1} f_{p-1}^{(h-1)}(\alpha) + \cdots + f_{p-h}(\alpha) = 0;$$

se ora si forma l'equazione determinante relativa allo stesso punto α per l'equazione $S_\varrho \Delta = 0$, si trova in modo semplicissimo che essa si può scrivere

$$\binom{r+\varrho-p+h}{h} f_p^{(h)}(\alpha) + \binom{r+\varrho-p+h}{h-1} f_{p-1}^{(h-1)} + \cdots + f_{p-h}(\alpha) = 0,$$

e quindi le sue radici differiscono da quelle della (3) per la quantità fissa $-\varrho$. Un analogo risultato si ha dalla equazione determinante relativa al punto $t = \infty$; onde risulta che dal gruppo dell'equazione $\Delta = 0$ si deduce facilmente quello dell'equazione $S_\varrho \Delta = 0$, e quando ϱ è un numero intero, le due equazioni hanno uguale gruppo, cioè sono della stessa *specie*. Segue da ciò e da noti teoremi sulle equazioni della stessa specie, che $p+1$ integrali qualunque delle equazioni

$$\ldots S_{\varrho-1}\Delta = 0,\ S_\varrho \Delta = 0,\ S_{\varrho+1}\Delta = 0, \ldots S_{\varrho+\nu}\Delta = 0, \ldots$$

sono legati da una relazione lineare a coefficienti razionali.

« 5. *Applicazioni.* I. L'equazione normale del second'ordine è

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)\, y'' + (b_0 + b_1 t)\, y' + c y = 0.$$

Applicando la trasformazione S_ϱ, si ottiene l'equazione trasformata:

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)\, \psi'' + \Big(b_0 + \varrho a_1 + (b_1 + 2\varrho a_2)\, t\Big)\, \psi' +$$
$$+ \Big(c + \varrho b_1 + \varrho(\varrho - 1) a_2\Big)\, \psi = 0.$$

Determino ϱ in modo che sia

$$c_0 + b_1 \varrho + a_2 \varrho\, (\varrho - 1) = 0,$$

ed ottengo $\dfrac{d\psi}{dt}$ come integrale dell'equazione del prim' ordine

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)\, \theta' + \Big(b_0 + \varrho a_1 + (b_1 + 2\varrho a_2)\, t\Big)\, \theta = 0;$$

questa si può integrare, e si ha quindi y dalla formola

$$y(x) = \int_\lambda \frac{\psi(t)\, dt}{(t-x)^{\varrho+1}} = \frac{1}{\varrho} \int_\lambda \frac{\theta(t)\, dt}{(t-x)^\varrho}.$$

È in ciò che consiste essenzialmente l'integrazione dell'equazione ipergeometrica di Gauss per mezzo di integrali definiti.

« II. Se nella Δ si ha $f_{p-2} = f_{p-3} = \cdots = f_0 = 0$, talchè

$$\Delta = f_p\, y^{(p)} + f_{p-1}\, y^{(p-1)} = 0,$$

si potrà ottenere $\psi^{(p-1)}$ mediante l'integrazione di un'equazione del prim'ordine. La trasformata $S_\varrho \Delta = 0$ sarà

$$(4) \quad f_p \psi^{(\varrho)} + (f'_{p-1} + \varrho f'_p) \psi^{(p-1)} + \cdots + (\varrho_{p-1}) \left(f_{p-1}^{(p-1)} + \frac{\varrho - p + 1}{p} f_p^{(p)} \right) \psi = 0,$$

ed essa si integra ponendo

$$\psi(x) = \int_\lambda \frac{\varphi(t)\, dt}{(t-x)^{\varrho+1}},$$

ed integrando per parti $p-1$ volte,

$$\psi(x) = \frac{1}{\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-p+1)} \int_\lambda \frac{\varphi^{(p-1)}(t)\, dt}{(t-x)^{\varrho-p+2}};$$

dove $\varphi^{(p-1)}(t)$ si ha immediatamente come integrale di un'equazione lineare del prim'ordine.

« È in ciò che consiste l'integrazione per integrali definiti dell'equazione ipergeometrica generalizzata del Pochhammer [1], equazione che è appunto la (4).

« III. Una applicazione notevole di questa trasformazione è quella cui abbiamo già fatto allusione: cioè l'integrazione mediante integrali multipli dell'equazione ipergeometrica generalizzata del Goursat [2] data dal Pochhammer [3]; questo metodo, per mezzo della teoria dell'operazione S_ϱ, si può presentare brevemente nel modo seguente:

« L'equazione del Goursat è

$$(5) \quad \Delta = (a_p x^p + b_p x^{p-1}) \varphi^{(p)} + (a_{p-1} x^{p-1} + b_{p-1} x^{p-2}) \varphi^{(p-1)} + \cdots$$
$$\cdots + (a_1 x + b_1) \varphi' + a_0 \varphi = 0.$$

« Per mezzo della trasformazione S_ϱ si ottiene un'equazione della medesima forma, il cui coefficiente a_0 si può annullare disponendo convenientemente di ϱ; indicando con ψ la trasformata di φ e ponendo $\frac{d\psi}{dx} = \theta$, si ha da integrare un'equazione della forma

$$(a_p x^p + b_p x^{p-1}) \theta^{(p-1)} + (a'_{p-1} x^{p-2} + b_{p-1} x^{p-2}) \theta^{(p-2)} + \cdots$$
$$\cdots + (a'_1 x + b'_1) \theta = 0.$$

In questa si faccia

$$\theta = x^\lambda \varphi_1;$$

(1) Crelle, T. LXXI. Cfr. Jordan, *Cours d'Analyse*, T. III, p 211.
(2) Annales de l'Ec. Normale Supérieure, S. II, t. III.
(3) Crelle, T. CII.

si ottiene un'equazione che contiene in tutti i termini il fattore x^λ: dividendo per questo si ha un'equazione della forma

$$(a_p x^{p-1} + b_q x^{q-1}) \varrho_1^{(p-1)} + (a''_{p-1} x^{p-1} + b''_{p-1} x^{p-2}) \varrho_1^{(p-2)} + \cdots$$
$$\cdots + (a''_1 x + b''_1) \varrho = 0 ,$$

e dove i coefficienti a'', b'' sono funzioni razionali di λ. Disponendo di λ in modo che sia $b_1'' = 0$ e dividendo l'equazione per a, si ha un'equazione della forma (5) ma di ordine di un'unità inferiore, e siccome si è mostrato che l'equazione di second'ordine della forma (5) è integrabile per mezzo di integrali definiti, la stessa proprietà, mediante la trasformazione (2), si estenderà all'equazione di 3^{zo}, di 4to,... di p^{mo} ordine.

« IV. Un'ultima osservazione è che, in generale, la trasformazione S_2 permette di ridurre ogni equazione normale di ordine p ad un'equazione (però non più normale, in generale) di ordine $p-1$; basta infatti disporre di ϱ in modo che nella trasformata, il coefficiente di ϱ sia nullo. Conviene osservare che l'equazione che serve a questa determinazione di ϱ è appunto l'equazione determinante della $\Delta = 0$ relativa al punto $t = \infty$ ».

Chimica. — *Sull'ossidazione dell'acido canforico* (1). Nota del Corrispondente L. Balbiano.

« In una breve Nota il Bamberger (2) riferisce sopra tentativi fatti per dimostrare sperimentalmente la presenza o l'assenza di doppi legami nell'acido canforico e dopo aver tentato inutilmente di addizionare acido bromidrico, studia il comportamento dell'anzidetto acido col permanganato di potassio. Riconosce che l'acido canforico è difficilmente attaccato da questo reagente, perchè dopo un'ebollizione prolungata per due giorni non ottiene altro che acido canforico inalterato.

« J. W. Brühl (3), pure allo stesso scopo di dimostrare se esistono o no legami etilenici, tenta l'ossidazione dell'acido canforico col permanganato potassico sia in soluzione alcalina che in soluzione acida; arriva alla conclusione che per ebollizione prolungata si forma solo poco acido carbonico, e la massima parte dell'acido canforico rimane inalterata. Aggiunge inoltre esplicitamente che non osservò la formazione di qualche altro prodotto oltre ai due sumenzionati.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.
(2) Berl. Berich. T. XXIII, p. 218.
(3) Berl. Berich. T. XXIV, p. 3405.