ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

Meccanica. — *Sulla teoria della capillarità.* Nota del Corrispondente E. Padova.

« Gauss è stato il primo ad ammettere l'ipotesi che i fenomeni capillari sieno dovuti a forze applicate ai punti della superficie, che separa due fluidi, e dotate di un potenziale uguale all'area della superficie dividente moltiplicata per una quantità costante per ogni coppia di fluidi a contatto; da questa ipotesi egli ha dedotto l'equazione della superficie e la spiegazione degli altri fatti che in questi fenomeni si presentano. Nella Nota *Sulle equazioni generali della dinamica*, che l'anno scorso ebbi l'onore di comunicare a questa Accademia, ho dimostrato che le tensioni interne dei corpi elastici e le pressioni, che si manifestano nell'interno dei fluidi, altro non sono che dei coefficienti, pei quali debbonsi moltiplicare quelle equazioni, che esprimono la condizione perchè in certi movimenti i legami fisici di un dato sistema non vengano modificati. Mi è quindi sembrato opportuno, a complemento delle applicazioni, che già ho dato di quella teoria, mostrare che i fenomeni capillari sono dovuti al fatto che non si può variare l'area degli elementi della superficie, che separa due fluidi, senza alterare l'energia del sistema, quando azioni esterne non vengano sovra di esso esercitate e che la costante introdotta da Gauss è appunto il fattore pel quale viene moltiplicata l'equazione, che esprime la condizione che quel legame fisico non deve essere modificato. A tale scopo è diretta l'attuale comunicazione, la quale mi sembra anche atta a gettar nuova luce sull'intima natura della causa, cui debbonsi attribuire i fenomeni della capillarità e giustifica l'uso invalso fra i fisici di assimilare, come ha fatto Young, ad una membrana elastica la superficie, che separa due fluidi.

« Dalle formule, che danno le componenti degli spostamenti dei punti di un sistema variabile di forma, facilmente può dedursi che la dilatazione superficiale di un elemento, la cui normale fa con degli assi coordinati cartesiani ortogonali angoli, i cui coseni sono α, β, γ, è data dall'equazione

$$(1)\quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x}(\beta^2+\gamma^2)+\frac{\partial v}{\partial y}(\gamma^2+\alpha^2)+\frac{\partial w}{\partial z}(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\\ -\alpha\gamma\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\beta\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

ove u, v, w sono le componenti dello spostamento dato al punto di coordinate x, y, z.

« Ricordiamo ora brevemente il metodo da me proposto per porre in equazione i problemi della dinamica. Dato che sia un sistema, se per legami fisici del sistema intendiamo delle relazioni fra le coordinate, che non possono essere modificate altro che variando l'energia del sistema; per legami geometrici quelle relazioni che non possono essere in nessun caso variate e per spostamenti conciliabili coi legami quelli che lasciano invariate le relazioni che rappresentano i legami, sieno essi fisici o geometrici, si diranno accelerazioni spontanee quegli aumenti delle velocità, che lasciano inalterata l'energia cinetica, qualunque siano le velocità dei vari punti, purchè conciliabili coi legami. Trovate che sieno le accelerazioni spontanee, se nell' intervallo di tempo dt si danno ai punti del sistema accelerazioni risultanti da quelle attuali e da quelle spontanee, mutate di segno, e si determina il corrispondente aumento di energia cinetica, i coefficienti dei differenziali delle coordinate, nella espressione di questo aumento, rappresentano le forze esterne, sicchè uguagliandoli alle espressioni di queste forze, quando esse sieno date, otteniamo le equazioni del moto.

« Ciò ricordato, consideriamo due fluidi, che occupino due spazi S_1, S_2 separati da una superficie σ. Sieno μ_1, μ_2 le densità dei due fluidi, x'_1, y'_1, z'_1; x'_2, y'_2, z'_2 le componenti della velocità di un punto del primo e del secondo fluido rispettivamente. Siccome occorre un lavoro per variare il volume di una molecola del primo o del secondo fluido, saranno conciliabili coi legami soltanto quelle velocità che soddisfaranno le equazioni

$$(2)\qquad \frac{\partial x'_1}{\partial x}+\frac{\partial y'_1}{\partial y}+\frac{\partial z'_1}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial x'_2}{\partial x}+\frac{\partial y'_2}{\partial y}+\frac{\partial z'_2}{\partial z}=0.$$

Se ammettiamo poi che occorra un lavoro per variare l'area di un elemento della superficie σ, saranno conciliabili con questo legame soltanto quelle velocità x', y', z' dei punti della superficie per le quali, conformemente alla (1), si avrà

$$(3)\qquad \frac{\partial x'}{\partial x}(\beta^2+\gamma^2)+\frac{\partial y'}{\partial y}(\gamma^2+\alpha^2)+\frac{\partial z'}{\partial z}(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta\left(\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\right)-$$
$$-\alpha\gamma\left(\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-\beta\gamma\left(\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial z'}{\partial y}\right)=0.$$

Moltiplichiamo le (2) per due fattori p_1, p_2 rispettivamente e la (3) per un altro fattore λ; per determinare le componenti della accelerazione spontanea avremo l'equazione

$$\int_{S_1}\left\{x'_1\left(\mu_1\xi_1-\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)+y'_1\left(\mu_1\eta_1-\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)+z'_1\left(\mu_1\zeta_1-\frac{\partial p_1}{\partial z}\right)\right\}dS+$$
$$(4)\qquad +\int_{S_2}\left\{x'_2\left(\mu_2\xi_2-\frac{\partial p_2}{\partial x}\right)+y'_2\left(\mu_2\eta_2-\frac{\partial p_2}{\partial y}\right)+z'_2\left(\mu_2\zeta_2-\frac{\partial p_2}{\partial z}\right)\right\}dS+$$
$$+\int_{\sigma}\left\{x'\xi+y'\eta+z'\zeta-(p_1-p_2)(\alpha x'+\beta y'+\gamma z')+\lambda\left[\frac{\partial x'}{\partial x}(\beta^2+\gamma^2)+\right.\right.$$
$$+\frac{\partial y'}{\partial y}(\gamma^2+\alpha^2)+\frac{\partial z'}{\partial z}(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta\left(\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\right)-$$
$$\left.\left.-\alpha\gamma\left(\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial x'}{\partial z}\right)-\beta\gamma\left(\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial z'}{\partial y}\right)\right]\right\}d\sigma=0$$

ove α, β, γ sono i coseni degli angoli, che la normale a σ, diretta verso l'interno del primo fluido fa cogli assi coordinati. Alla funzione, che è sotto il segno integrale esteso a σ, aggiungiamo e togliamo l'espressione

$$\lambda(x'\alpha+y'\beta+z'\gamma)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)+\frac{\partial\lambda}{\partial x}x'+\frac{\partial\lambda}{\partial y}y'+\frac{\partial\lambda}{\partial z}z'-$$
$$-(x'\alpha+y'\beta+z'\gamma)\left(\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\beta\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)$$

ed osserviamo che si ha

$$\int_\sigma\Big\{\lambda\Big[\frac{\partial x'}{\partial x}(\beta^2+\gamma^2)+\frac{\partial y'}{\partial y}(\gamma^2+\alpha^2)+\frac{\partial z'}{\partial z}(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta\left(\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\right)-$$
$$-\alpha\gamma\left(\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-\beta\gamma\left(\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-(x'\alpha+y'\beta+z'\gamma)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\Big]+$$
$$+\frac{\partial\lambda}{\partial x}x'+\frac{\partial\lambda}{\partial y}y'+\frac{\partial\lambda}{\partial z}z'-(x'\alpha+y'\beta+z'\gamma)\left(\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\beta\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\Big\}d\sigma=$$
$$=\int_\sigma\Big\{\alpha\left[\frac{d\lambda(z'\alpha-x'\gamma)}{dz}-\frac{d\lambda(x'\beta-y'\alpha)}{dy}\right]+\beta\left[\frac{d\lambda(x'\beta-y'\alpha)}{dx}-\frac{d\lambda(y'\gamma-z'\beta)}{dz}\right]+$$
$$+\gamma\left[\frac{d\lambda(y'\gamma-z'\beta)}{dy}-\frac{d\lambda(z'\alpha-x'\gamma)}{dx}\right]\Big\}d\sigma$$

e pel teorema di Stokes, essendo finite e continue le funzioni ora considerate sulla superficie σ, questo integrale è uguale all'altro esteso al contorno di σ

$$\int_l\lambda(a_1x'+b_1y'+c_1z')\,dl \tag{5}$$

ove a_1, b_1, c_1 rappresentano i coseni degli angoli, che la normale al contorno, situata nel piano tangente alla superficie σ, fa cogli assi coordinati. quindi se, come ora supponiamo, la superficie σ è chiusa, questo integrale è zero e per determinare le componenti della accelerazione spontanea avremo, invece della (4), l'equazione

$$\int_{S_1}\Big\{x'_1\left(\xi_1\mu_1-\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)+y'_1\left(\eta_1\mu_1-\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)+z'_1\left(\zeta_1\mu_1-\frac{\partial p_1}{\partial z}\right)\Big\}dS$$
$$+\int_{S_2}\Big\{x'_2\left(\xi_2\mu_2-\frac{\partial p_2}{\partial x}\right)+y'_2\left(\eta_2\mu_2-\frac{\partial p_2}{\partial y}\right)+z'_2\left(\zeta_2\mu_2-\frac{\partial p_2}{\partial z}\right)\Big\}dS \tag{6}$$
$$+\int_\sigma\Big\{x'\Big[\xi-(p_1-p_2)\alpha+\lambda\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial x}+$$
$$+\alpha\left(\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\beta\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\Big]$$
$$+y'\Big[\eta-(p_1-p_2)\beta+\lambda\beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial y}+$$
$$+\beta\left(\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\beta\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\Big]$$
$$+z'\Big[\zeta-(p_1-p_2)\gamma+\lambda\gamma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial z}+$$
$$+\gamma\left(\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\beta\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\Big]\Big\}d\sigma=0.$$

Osserviamo che si ha la relazione

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}$$

che non è altro che una forma sotto la quale può mettersi la nota equazione di Lamé

$$\frac{\Delta_2 \mathrm{U}}{\sqrt{\Delta_1 \mathrm{U}}}-\frac{d\sqrt{\Delta_1 \mathrm{U}}}{d\mathrm{U}}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2},$$

ove ϱ_1 e ϱ_2 sono i raggi principali di curvatura ed U quella funzione di x, y, z che, uguagliata ad una costante, fornisce l'equazione della superficie; poniamo inoltre per brevità

$$\mathrm{P}=\alpha\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\beta\frac{\partial \lambda}{\partial y}+\gamma\frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

e troveremo come componenti dell'accelerazione spontanea dei punti dei due fluidi respettivamente le espressioni

$$\xi_1=\frac{1}{\mu_1}\frac{dp_1}{dx},\ \eta_1=\frac{1}{\mu_1}\frac{dp_1}{dy},\ \zeta_1=\frac{1}{\mu_1}\frac{dp_1}{dz};\ \xi_2=\frac{1}{\mu_2}\frac{dp_2}{dx},\ \eta_2=\frac{1}{\mu_2}\frac{dp_2}{dy},\ \zeta_2=\frac{1}{\mu_2}\frac{dp_2}{dz}$$

e pei punti della superficie σ le altre

$$\xi=\alpha\left[p_1-p_2-\lambda\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\mathrm{P}\right]+\frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

$$\eta=\beta\left[p_1-p_2-\lambda\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\mathrm{P}\right]+\frac{d\lambda}{dy},$$

$$\zeta=\gamma\left[p_1-p_2-\lambda\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\mathrm{P}\right]+\frac{d\lambda}{dz}.$$

Se dunque sulla superficie σ non vengono applicate forze esterne, la condizione, perchè essa sia in equilibrio, è espressa dalle equazioni

$$\alpha\left[p_1-p_2-\lambda\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\mathrm{P}\right]=-\frac{d\lambda}{dx},$$

$$\beta\left[p_1-p_2-\lambda\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\mathrm{P}\right]=-\frac{d\lambda}{dy},$$

$$\gamma\left[p_1-p_2-\lambda\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)-\mathrm{P}\right]=-\frac{d\lambda}{dz},$$

le quali possono trasformarsi nelle altre

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \lambda}{\partial x}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial \lambda}{\partial y}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \lambda}{\partial z},\quad p_1-p_2=\lambda\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right);$$

le due prime mostrano che la funzione λ deve essere costante sulla superficie e la terza, ove si deve considerare λ come costante, è l'equazione della superficie stessa.

« Quando i fluidi sono soggetti alla sola azione della gravità e l'asse delle z è verticale si ha

$$p_1 = g\mu_1 z + c_1 , \qquad p_2 = g\mu_2 z + c_2 ,$$

sicchè l'equazione della superficie dividente i due fluidi diviene

$$g(\mu_1 - \mu_2) z - \lambda \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = c$$

la quale, quando si chiami $-A_{12}$ la costante λ, altro non è se non la (13) della tredicesima lezione del trattato di meccanica del Kirchhoff.

« Se si hanno tre fluidi, separati dalle superficie σ_{12}, σ_{23}, σ_{31}, le quali si tagliano lungo la linea l, per espressione della energia cinetica dobbiamo prendere

$$\frac{1}{2}\left\{ \Sigma \int_{s_r} (x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^3)\, ds + \Sigma \int_{\sigma_{rs}} (x'^2 + y'^2 + z'^2) d\sigma + \int_l (x'^2 + y'^2 + z'^2) dl \right\};$$

sicchè le componenti dell'accelerazione spontanea pei punti di l saranno, per la (5),

$$\xi = \Sigma \lambda_{rs}\, a_{rs} , \qquad \eta = \Sigma \lambda_{rs}\, b_{rs} , \qquad \zeta = \Sigma \lambda_{rs}\, c_{rs} ,$$

ove a_{rs}, b_{rs}, c_{rs} sono i coseni degli angoli, che fa cogli assi coordinati, la retta m_{rs} normale alla linea l nel punto x, y, z situata nel piano tangente in quel punto alla superficie σ_{rs}; se nessuna forza agisce sopra l dovremo dunque avere per l'equilibrio

$$\Sigma \lambda_{rs} \cos(m_{rs}\, \varepsilon) = 0$$

ove ε è una direzione arbitraria e ritroviamo così la (15) della sopracitata lezione del Kirchhoff. Abbiamo dunque per questa via tutte le equazioni fondamentali della teoria della capillarità ».

Zoologia. — *Le Leptocefalide e la loro trasformazione in Murenide*. Nota preliminare del Corrispondente G. B. Grassi e del dott. S. Calandruccio.

Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Risoluzione di due problemi relativi alla deformazione di una sfera omogenea isotropa*. Nota di R. Marcolongo, presentata dal Socio Cremona.

« La deformazione di una sfera omogenea isotropa è stata assegnata da varî geometri, e con metodi diversi, allorchè sulla superficie limite sono date le forze o gli spostamenti. In una precedente Nota (1), valendomi del metodo

(1) Rend. Accad. Lincei. Decembre 1889.