ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

« Quando i fluidi sono soggetti alla sola azione della gravità e l'asse delle z è verticale si ha

$$p_1 = g\mu_1 z + c_1\,, \qquad p_2 = g\mu_2 z + c_2\,,$$

sicchè l'equazione della superficie dividente i due fluidi diviene

$$g(\mu_1 - \mu_2)z - \lambda\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = c$$

la quale, quando si chiami $-A_{12}$ la costante λ, altro non è se non la (13) della tredicesima lezione del trattato di meccanica del Kirchhoff.

« Se si hanno tre fluidi, separati dalle superficie σ_{12}, σ_{23}, σ_{31}, le quali si tagliano lungo la linea l, per espressione della energia cinetica dobbiamo prendere

$$\frac{1}{2}\left\{\Sigma\int_{s_r}(x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^3)\,ds + \Sigma\int_{\sigma_{rs}}(x'^2 + y'^2 + z'^2)d\sigma + \int_l (x'^2 + y'^2 + z'^2)dl\right\};$$

sicchè le componenti dell'accelerazione spontanea pei punti di l saranno, per la (5),

$$\xi = \Sigma\lambda_{rs}\,a_{rs}\,, \qquad \eta = \Sigma\lambda_{rs}\,b_{rs}\,, \qquad \zeta = \Sigma\lambda_{rs}\,c_{rs}\,,$$

ove a_{rs}, b_{rs}, c_{rs} sono i coseni degli angoli, che fa cogli assi coordinati, la retta m_{rs} normale alla linea l nel punto x, y, z situata nel piano tangente in quel punto alla superficie σ_{rs}; se nessuna forza agisce sopra l dovremo dunque avere per l'equilibrio

$$\Sigma\lambda_{rs}\cos(m_{rs}\,\varepsilon) = 0$$

ove ε è una direzione arbitraria e ritroviamo così la (15) della sopracitata lezione del Kirchhoff. Abbiamo dunque per questa via tutte le equazioni fondamentali della teoria della capillarità ».

Zoologia. — *Le Leptocefalide e la loro trasformazione in Murenide*. Nota preliminare del Corrispondente G. B. Grassi e del dott. S. Calandruccio.

Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Risoluzione di due problemi relativi alla deformazione di una sfera omogenea isotropa*. Nota di R. Marcolongo, presentata dal Socio Cremona.

« La deformazione di una sfera omogenea isotropa è stata assegnata da varî geometri, e con metodi diversi, allorchè sulla superficie limite sono date le forze o gli spostamenti. In una precedente Nota (1), valendomi del metodo

(1) Rend. Accad. Lincei. Decembre 1889.

di integrazione del prof. Cerruti, ho studiato il caso in cui sulla superficie limite sono date parte delle forze e parte degli spostamenti; mi propongo ora di studiare due nuovi problemi.

« 1. Consideriamo una sfera omogenea ed isotropa il cui raggio sia eguale ad uno; riferiamo i suoi punti ad un sistema di coordinate polari r, θ, φ, il cui polo sia nel centro della sfera stessa. Supporremo che su ogni elemento di massa non agiscano forze esterne. Indichiamo con: u_r, u_θ, u_φ le proiezioni dello spostamento di un punto O della sfera, scelto ad arbitrio ma fisso, sul raggio vettore, sulla tangente al meridiano ed al parallelo della sfera passante per O e concentrica alla data. Queste proiezioni hanno la forma seguente (¹):

$$u_r = r\mathrm{X} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial r}\,;\; r\,u_\theta = -\frac{r}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \theta}\,;\; r\operatorname{sen}\theta\, u_\varphi = r\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \varphi}$$

dove:

$$\mathrm{N} = \mathrm{Z} - \frac{r^2}{4}\,\mathrm{G}\;;\quad \mathrm{X} = r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} + \frac{3}{2}\,\mathrm{T}\;;\quad \mathrm{G} = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}\, r\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} + \frac{3\,\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}\,\mathrm{T}.$$

Le funzioni Y, Z, T, sono finite, continue e ad un sol valore in ogni punto della sfera e soddisfano la $\Delta^2 = 0$. Rammentando che se ψ soddisfa la $\Delta^2 = 0$ sarà pure:

$$\Delta^2\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0 \quad;\quad \Delta^2\left(r^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right) = 0 \quad \text{ecc.}$$

si conclude che in tutta la sfera le due funzioni X, G soddisfano la $\Delta^2 = 0$; non così la N. La dilatazione cubica Θ è data da:

$$\Theta = \frac{\omega^2}{\Omega^2}\,\frac{\partial (r\mathrm{X})}{\partial r}.$$

Infine dette: $\mathrm{F}_r, \mathrm{F}_\theta, \mathrm{F}_\varphi$ le componenti della forza, riferita all'unità superficiale, nel senso delle r, θ, φ crescenti, divise per $2\varrho\,\omega^2$ essendo ϱ la densità della sfera, le equazioni ai limiti assumono la forma:

$$\mathrm{F}_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\Omega^2 - 2\,\omega^2}{2\,\omega^2}\,\Theta\;;\quad \mathrm{F}_\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{r}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right);$$

$$\mathrm{F}_\varphi = \frac{1}{2r\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{r}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right).$$

« Voglio ora propormi di assegnare la deformazione della sfera, allorchè sulla sua superficie limite sono date: la componente normale F_r delle forze e le componenti tangenziali degli spostamenti; cioè u_φ secondo il parallelo ed u_θ secondo il meridiano. Oppure: la componente normale u_r dello spostamento e le componenti tangenziali delle forze; cioè F_φ secondo il parallelo ed F_θ secondo il meridiano.

(¹) Borchardt, *Untersuchungen über die Elasticität fester isotroper Körper unter Berücksichtigung der Wärme.* Monats. Berichte d. Akad. d. Wiss. zu Berlin. Januar 1879; oppure *Gesammelte Werke*, pag. 248.

« In ognuno di questi due casi si tratterà di determinare, mercè le condizioni ai limiti, le funzioni incognite Y, Z, T.

« 2. Cominciamo dal primo problema. Per $r = 1$ si ha:

$$\left.\begin{aligned} F_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\Omega^2 - 2\,\omega^2}{2\,\omega^2}\,\Theta \;; \quad u_\theta = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial N}{\partial \theta}\;; \\ \operatorname{sen}\theta\, u_\varphi = \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial N}{\partial \varphi}\,. \end{aligned}\right\} \quad (1$$

Le F_r, u_θ, u_φ sono funzioni, arbitrariamente date, di φ e di θ. Si ponga:

$$U = Z - \frac{1}{4}\,G\,.$$

La funzione U sarà finita continua e ad un sol valore e soddisferà la $\Delta^2 = 0$; le due ultime equazioni (1 assumeranno la forma:

$$u_\theta = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad ; \quad \operatorname{sen}\theta\, u_\varphi = \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\,. \quad (2$$

Sostituendo nella espressione di F_r ad u_r e Θ i loro valori e riflettendo che il secondo membro deve essere calcolato per $r = 1$, si trova:

$$F_r = \frac{3\Omega^2 - 2\omega^2}{2\,\Omega^2}\left\{ r\,\frac{\partial X}{\partial r} + X\right\} + r^2\,\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} - \frac{1}{4}\left\{ r^2\,\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + 4r\,\frac{\partial G}{\partial r} + 2G\right\}. \quad (3$$

Tra le equazioni (2 eliminiamo successivamente U ed Y. Otterremo:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\operatorname{sen}\theta\, u_\varphi) - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right\} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\,.$$

Ma la Y soddisfa la $\Delta^2 = 0$; cioè:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial Y}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0\,;$$

però l'equazione cui soddisfa Y potrà scriversi:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial Y}{\partial r}\right) = A_s \quad (4$$

dove:

$$A_s = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\theta}\,(\operatorname{sen}\theta\, u_\varphi)\right\} \quad (5$$

è una funzione nota di θ e φ per tutti i punti della superficie sferica limite. D'altra parte se V è una funzione che in tutta la sfera soddisfa la $\Delta^2 = 0$ ed in superficie prende valori dati ad arbitrio V_s, sarà:

$$V = \frac{1 - r^2}{4\pi}\int_s \frac{V_s\,ds}{e^3} \quad \text{dove} \quad e = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}\,;$$

x', y', z' indicano le coordinate ortogonali di un punto variabile sulla superficie sferica; x, y, z quelle di un punto scelto a piacere, ma fisso, nell'interno della sfera e V il valore della funzione in quel punto.

« Inoltre si ha:
$$\mathrm{V}=\mathrm{V}_1+2r\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial r}\,; \quad \text{essendo:}\quad \mathrm{V}_1=\frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\mathrm{V}_s\,ds}{e}.$$
Quindi ove si ponga:
$$\mathrm{A}_1=\frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\mathrm{A}_s\,ds}{e}$$
l'equazione (4 può trasformarsi nella seguente:
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial r}\right)=\mathrm{A}_1+2r\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial r}. \tag{6}$$
Ma tanto il primo che il secondo membro di questa equazione soddisfano alla $\Delta^2=0$ e però l'equazione stessa avrà luogo in tutta la sfera.

« Con due successive integrazioni e con semplici riduzioni trarremo:
$$\mathrm{Y}=\frac{1}{r}\int \mathrm{A}_1\,dr+\int\frac{\mathrm{A}_1\,dr}{r}+\frac{c_1}{r}+c_2$$
dove c_1 e c_2 sono due funzioni arbitrarie di due angoli θ e φ; la Y dovendo essere finita e determinata anche per $r=0$, sarà $c_1=0$, mentre c_2 deve ridursi ad una costante dalla quale possiamo fare astrazione non avendo influenza sugli spostamenti. Però sarà:
$$\mathrm{Y}=\frac{1}{r}\int_0^r \mathrm{A}_1\,dr+\int_0^r\frac{\mathrm{A}_1\,dr}{r}. \tag{7}$$

« Sarebbe facile verificare che ognuna delle due parti di cui si compone la Y è finita per $r=0$ e soddisfa la $\Delta^2=0$.

« In modo del tutto analogo si procede per la ricerca di U. Posto:
$$\mathrm{B}_s=-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\, u_\theta)\right\};$$
$$\mathrm{B}_1=\frac{1}{4\pi}\int_s\frac{\mathrm{B}_s\,ds}{e}$$
risulterà:
$$\mathrm{U}=\frac{1}{r}\int_0^r \mathrm{B}_1\,dr+\int_0^r\frac{\mathrm{B}_1\,dr}{r}. \tag{8}$$

« 3. L'equazione (3 sussiste solo per la superficie limite; ma può, con artificio analogo, essere trasformata in un'altra che sussiste in tutta la sfera. Basterà porre:
$$\mathrm{F}_r=\mathrm{F}_1+2r\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial r}$$
dove:
$$\mathrm{F}_1=\frac{1}{4\pi}\int_s\frac{\mathrm{F}_r\,ds}{e}.$$

L'equazione:

$$\frac{3\Omega^2-2\omega^2}{2\,\Omega^2}\left\{r\frac{\partial X}{\partial r}+X\right\}+r^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}-\frac{1}{4}\left\{r^2\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}+4r\frac{\partial G}{\partial r}+2G\right\}=F_1+2r\frac{\partial F_1}{\partial r}$$

varrà in tutta la sfera e, tenendo presente le espressioni di X, Z, G, potrà facilmente essere trasformata in una equazione differenziale lineare del secondo ordine in T; e precisamente:

$$r^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{3\Omega^2-4\omega^2}{2\,\Omega^2}\,r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{3\Omega^2-4\omega^2}{2\,\Omega^2}\,T=2\left\{F_1+2r\frac{\partial F_1}{\partial r}-r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right\}. \quad (9$$

Il secondo membro può essere posto sotto forma più simmetrica osservando che:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=B_1+2r\frac{\partial B_1}{\partial r}$$

e però posto:

$$B'_1=\frac{1}{r}\int B_1\,dr$$

risulterà successivamente:

$$r\frac{\partial U}{\partial r}=B'_1+2r\frac{\partial B'_1}{\partial r}\quad;\quad r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}=B_1+2r\frac{\partial B_1}{\partial r}-2\left\{B'_1+2r\frac{\partial B'_1}{\partial r}\right\}.$$

Se quindi definiamo una nuova funzione K tale che:

$$K=F_1+2\,B'_1-B_1$$

sarà $\Delta^2 K=0$ e l'equazione (9, ove si faccia:

$$\xi=\log r\;;\; T=S+2r\frac{\partial S}{\partial r} \quad (10$$

si trasformerà nella:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}+\frac{\Omega^2-4\,\omega^2}{2\,\Omega^2}\frac{\partial S}{\partial \xi}+\frac{3\,\Omega^2-4\,\omega^2}{2\,\Omega^2}S=2K. \quad (11$$

Questa equazione differenziale lineare del 2° ordine a coefficienti costanti, s'integrerà con metodi noti. Posto:

$$\alpha=\frac{4\,\omega^2-\Omega^2}{4\,\Omega^2}\quad;\quad \beta=\frac{\sqrt{23\,\Omega^4-24\,\Omega^2\,\omega^2-16\,\omega^4}}{4\,\Omega^2}$$

se $\alpha<0$, β è reale e quindi, accennando ora con e l'ordinaria base dei logaritmi neperiani:

$$S=-2\int_{-\infty}^{0}K\,(e^{\xi+\sigma})\,\frac{\operatorname{sen}\beta\sigma}{\beta}\,e^{\alpha\sigma}\,d\sigma+r^{\alpha}\,(c_1\cos\beta\xi+c_2\operatorname{sen}\beta\xi)$$

in cui c_1 e c_2 sono funzioni arbitrarie dei due angoli θ e φ; e affinchè S sia finita anche per $r=0$ occorre che: $c_1=c_2=0$.

« Se poi $\alpha>0$, allora $\beta'=\dfrac{\sqrt{16\,\omega^4+24\,\Omega^2\,\omega^2-23\,\Omega^4}}{4\,\Omega^4}$ è reale e in tal caso sarà:

$$S=-2\int_{-\infty}^{0}K\,(e^{\xi+\sigma})\,\frac{\operatorname{Sh}\beta'\sigma}{\beta'}\,e^{\alpha\sigma}\,d\sigma+r^{\alpha}\,(c_1\operatorname{Ch}\beta\xi+c_2\operatorname{Sh}\beta\xi)$$

e poichè per $r=0$, Ch $\beta\xi$ e Sh $\beta\xi$ convergono all'infinito anche in tal caso occorre che $c_1 = c_2 = 0$. Avremo adunque in ogni caso, riflettendo che $\beta' = i\beta$:

$$S = -2\int_{-\infty}^{0} K\,(e^{\xi+\sigma})\,\frac{\operatorname{sen}\beta\sigma}{\beta}\,e^{\alpha\sigma}\,d\sigma\,.$$

Determinata S mediante un integrale definito, la funzione T verrà espressa dalla (10 come somma di due funzioni potenziali ben definite. Anche le altre funzioni G, X, Z potranno esprimersi mediante la S e la sua derivata prima rispetto al raggio. Basta osservare che, tenendo conto dell'equazione cui soddisfa S, si ha:

$$r\frac{\partial T}{\partial r} = 4K - \frac{3\,\Omega^2 - 2\,\omega^2}{\Omega^2}\,S + \frac{4\,\omega^2}{\Omega^2}\,r\,\frac{\partial S}{\partial r}\;;$$

sarà quindi agevole formare la X e la G. Quanto alla Z avremo:

$$Z = \frac{1}{4}\,G + \frac{1}{r}\int_0^r B_1\,dr + \int_0^r \frac{B_1\,dr}{r}\,.$$

Il problema resta con ciò risoluto e gli spostamenti verranno espressi mediante integrali definiti.

« 4. Passiamo al secondo problema; supponiamo cioè che sulla superficie limite sieno date: la componente normale u_r degli spostamenti e le componenti tangenziali delle forze cioè F_θ, F_φ; e però u_r, F_θ, F_φ sono funzioni note dei due angoli θ, φ.

« Per $r=1$ avremo adunque:

$$\left.\begin{aligned} u_r = X + r\frac{\partial X}{\partial r}\;;\quad F_\theta = \frac{1}{2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{r}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right);\\ F_\varphi = \frac{1}{2r\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{r}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right). \end{aligned}\right\} \quad (12$$

Se poniamo:

$$A = \frac{1}{2}\,X - \frac{1}{4}\left(r\frac{\partial G}{\partial r} + r\right) + r\frac{\partial Z}{\partial r} - Z\;;\quad B = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial Y}{\partial r} - Y\right) \quad (13$$

si troverà facilmente che:

$$F_\theta = \frac{\partial A}{\partial\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial B}{\partial\varphi}\;;\quad F_\varphi = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial A}{\partial\varphi} + \frac{\partial B}{\partial\theta}$$

le quali coincidono colle (2 del problema precedente se in quelle si cambia u_φ in F_φ; u_θ in F_θ; Y in B; U in A. Se quindi si pone:

$$B_s = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\,F_\varphi)\right\};\; A_s = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\,F_\theta)\right\}$$

$$B_1 = \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{B_s\,ds}{e}\;;\quad A_1 = \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{A_s\,ds}{e}:$$

risulterà:

$$B = \frac{1}{r}\int_0^r B_1\, dr + \int_0^r \frac{B_1\, dr}{r} \quad ; \quad A = \frac{1}{r}\int_0^r A_1\, dr + \int_0^r \frac{A_1\, dr}{r}.$$

Potremo quindi determinare la Y. Infatti la seconda delle (13 può scriversi:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Y}{r}\right) = \frac{2B}{r^2}$$

d'onde:

$$Y = 2r\int \frac{B\, dr}{r^2} + c_1 r$$

dove c_1 è una funzione di due angoli θ, φ tale che: $\Delta^2 (r c_1) = 0$.

« Sarà quindi:

$$r c_1 = ax + by + cz$$

essendo a, b, c costanti arbitrarie; ma le proiezioni u, v, w dello spostamento di un punto su tre assi ortogonali sono:

$$u = xX + y\frac{\partial Y}{\partial z} - z\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{ecc. (1)}$$

e però si vede subito che il contributo di $r c_1$ in queste proiezioni si riduce a

$$cy - bz\,;\ az - cx\,;\ bx - cy$$

che definiscono una rotazione di corpo rigido, dalla quale si può fare astrazione. Osserviamo infine che tenuto conto del valore di B si deduce:

$$Y = -\frac{1}{r}\int_0^r B_1\, dr - 2\int_0^r \frac{B_1\, dr}{r} + 3r\int_0^r \frac{B_1\, dr}{r^2} \qquad (14$$

ed ognuna delle tre parti delle quali si compone la Y soddisfa la $\Delta^2 = 0$.

« 5. Resta a calcolare la funzione T. La prima delle equazioni (12 si trasforma così:

$$X + r\frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{1}{4} r\frac{\partial G}{\partial r} - \frac{1}{2} G = u_r$$

oppure in quest'altra:

$$X + r\frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{1}{4} r\frac{\partial G}{\partial r} - \frac{1}{2} G = u_1 + 2r\frac{\partial u_1}{\partial r} \qquad (15$$

dove si è posto:

$$u_1 = \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{u_r\, ds}{e}.$$

(1) Borchardt, Mem. cit.

Ambo i membri della (15 soddisfano la $\Delta^2 = 0$ e però essa varrà in tutta la sfera. Tra questa e la prima delle (13 possiamo agevolmente eliminare Z e $\frac{\partial Z}{\partial r}$ e si trova:

$$r \frac{\partial X}{\partial r} - 2X + G = 2V \tag{16}$$

essendo:

$$V = r \frac{\partial}{\partial r}\left(u_1 + 2r \frac{\partial u_1}{\partial r} - A\right) - \left(u_1 + 2r \frac{\partial u_1}{\partial r}\right).$$

Ma se:

$$A'_1 = \frac{1}{r}\int_0^r A_1\, dr$$

si ha:

$$V = \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} - A'_1 - u_1\right) + 2r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} - A'_1 - u_1\right).$$

Definendo quindi una nuova funzione K tale che:

$$K = r \frac{\partial u_1}{\partial r} - A'_1 - u_1$$

sarà: $\Delta^2 K = 0$; e se come nel caso precedente si pone:

$$\xi = \log r \quad ; \quad T = S + 2r \frac{\partial S}{\partial r}$$

l'equazione (16 si trasformerà nella seguente:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \frac{\Omega^2 - 2\,\omega^2}{2\,\Omega^2} \frac{\partial S}{\partial \xi} - \frac{\omega^2}{\Omega^2} S = 2K$$

d'onde, coi metodi noti, si trae:

$$S = -2\int_{-\infty}^0 K\left(e^{\xi+\sigma}\right) \frac{\mathrm{Sh}\,\beta\sigma}{\beta} e^{\alpha\sigma}\, d\sigma + r^\alpha\left(c_1\, \mathrm{Ch}\,\beta\xi + c_2\, \mathrm{Sh}\,\beta\xi\right)$$

dove c_1 e c_2 sono due funzioni arbitrarie di θ e φ e:

$$\alpha = \frac{2\,\omega^2 - \Omega^2}{4\,\Omega^2} \quad ; \quad \beta = \frac{\sqrt{4\,\omega^4 + \Omega^4 + 12\,\omega^2\,\Omega^2}}{4\,\Omega^2}.$$

Sarà quindi β reale e maggiore di α. Ora se $\alpha > 0$, per $r = 0$, $r^\alpha\, \mathrm{Ch}\,\beta\xi$, $r^\alpha\, \mathrm{Sh}\,\beta\xi$ tendono all'infinito; occorre dunque che $c_1 = c_2 = 0$ e lo stesso deve accadere se $\alpha < 0$ e però in ogni caso:

$$S = -2\int_{-\infty}^0 K\left(e^{\xi+\sigma}\right) \frac{\mathrm{Sh}\,\beta\sigma}{\beta} e^{\alpha\sigma}\, d\sigma.$$

La funzione T resta subito determinata; inoltre:

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = 4K + \frac{2\,\omega^2}{\Omega^2} S + \frac{2\,\omega^2}{\Omega^2}\, r\, \frac{\partial S}{\partial r}$$

e finalmente:

$$Z=\frac{1}{4}G-\frac{1}{2}X+A-\left(u_1+2r\frac{\partial u_1}{\partial r}\right);$$

e poichè le espressioni di X e G mediante S e $\frac{\partial S}{\partial r}$ possono ottenersi in modo facile, possiamo considerare il problema come risoluto.

« Le funzioni Y, Z, G ecc. si mantengono finite anche per $r=0$, come potrebbe provarsi riflettendo che le forze $(F_r, F_\theta, F_\varphi)$ costituiscono un sistema di forze in equilibrio (1) ».

Matematica. — *La legge di probabilità degli errori d'osservazione.* Nota del prof. P. Pizzetti, presentata dal Socio Cremona.

Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Resistenza elettrica delle amalgame di Piombo e di Cadmio.* Nota di G. Vicentini e C. Cattaneo, presentata dal Socio Blaserna.

« Abbiamo continuato lo studio della resistenza elettrica specifica delle amalgame di alcuni metalli facilmente fusibili, nonchè di diverse loro leghe, e ciò per procurarci dei dati alquanto più estesi di quelli determinati da diversi sperimentatori, come già è fatto cenno nelle Note precedenti (2). Nella attuale diamo i risultati di misure fatte sulle amalgame di piombo e di cadmio, allo stato di perfetta fusione.

« Non descriviamo il metodo di misura, le cure osservate nelle esperienze, nonchè il modo col quale sono calcolati i valori che registriamo in seguito, il tutto essendo stato descritto, specialmente nello studio della resistenza elettrica di alcuni metalli facilmente fusibili (3).

« È qui solo da osservare, che i valori della resistenza specifica ϱ alle temperature estreme, per alcune amalgame furono tolti dal prolungamento della curva di ϱ. In questo caso però i valori registrati sono posti fra parentesi.

Amalgame di piombo.

« Ne abbiamo studiate sei, corrispondenti alle formole atomiche seguenti: $Pb\,Hg_{24}$, $Pb\,Hg_{12}$, $Pb\,Hg_4$, $Pb\,Hg_2$, $Pb\,Hg$, $Pb_3\,Hg$. La ricchezza in piombo è così compresa (in peso) fra 4 e 76 %. Nel preparare le amalgame, per

(1) Cfr. Borchardt, *Ueber Deformationen elastischer isotroper Körper durch mechanische an ihrer Oberfläche wirkende Kräfte.* Akad. d. Wiss. z. Berlin 1873; oppure *Gesam. Wer.*, pag. 311.

(2) Rend. R. Acc. Lincei, vol. VII, 1° sem., p. 258; 2° sem. p. 95, 1891.

(3) Atti R. Acc. dei Fisiocritici. Siena, 1890.