ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

« Per il Bi non abbiamo una curva abbastanza ricca di punti nell'ultimo tratto (alle massime concentrazioni) il quale mostra l'esistenza di un massimo di resistenza. Per trovare il punto corrispondente alla resistenza del bismuto puro, resta un po' di incertezza fra i valori 1,00 e 1,05 a un dipresso; ecco perchè più sopra abbiamo messo il valore intermedio 1,03.

« Dal fin qui detto, chiaro emerge, che *lo studio della resistenza elettrica delle amalgame concentrate di un metallo, può servire a determinare con sufficiente approssimazione la resistenza specifica del metallo puro, allo stato di fusione* ».

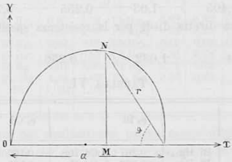
Fisica. — *Sulla tenacità del ferro a diverse temperature.* Nota di M. Ascoli, presentata dal Socio Blaserna.

Fisica. — *Sopra la misura della plasticità dei solidi e sopra la plasticità del ferro a diverse temperature.* Nota di M. Ascoli, presentata dal Socio Blaserna.

Queste Note verranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Sull'attrazione del corpo di massima attrazione al secondo polo.* Nota di Alfonso Sella, presentata dal Socio Blaserna.

« Mi sono proposto in questa Nota di calcolare l'attrazione del corpo di massima attrazione al secondo polo, cioè alla seconda estremità dell'asse di simmetria, se la prima è il punto per cui esso corpo è di massima attrazione.



« L'attrazione esercitata sul punto O dal disco di raggio $MN = y$, dello spessore dx ed alla distanza $OM = x$ vale:

$$2\pi\gamma\delta\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx$$

essendo δ la densità della sostanza, γ la costante di attrazione. L'attrazione totale in O varrà quindi:

$$\text{(1)}\qquad A = 2\pi\gamma\delta\int_0^a\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx.$$

« L'equazione della curva meridiana del corpo di massima attrazione è per le lettere segnate nella figura [1]:

$$r^2 = a^2\cos\vartheta,$$

ossia se riferita all'origine O, cioè al secondo polo ed agli assi segnati nella figura:

$$\left\{(a-x)^2+y^2\right\}^{3/2} = (a-x)\,a^2.$$

« Sostituendo in (1) il valore, che da quest'ultima formola si ricava per x^2+y^2, si ottiene:

$$A = 2\pi\gamma\delta\int_0^a\left(1-\frac{x}{\sqrt{a^{4/3}(a-x)^{2/3}+2ax-a^2}}\right)dx.$$

« Per ottenere la razionalità e per portare il parametro a fuori del segno di integrazione, mi servo della sostituzione:

$$(a-x)^{1/3} = a^{1/3}z,$$

grazie alla quale si trova:

$$\text{(2)}\qquad A = 2\pi\gamma\delta a\left\{1-\frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{(z^2-z^5)\,dz}{\sqrt{-2z^3+z^2+1}}\right\} =$$

$$= 2\pi\gamma\delta a\left\{1-\frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{(z^2-z^5)\,dz}{\sqrt{(1-z)\left(z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\right)}}\right\}.$$

« L'integrale che ora compare, è un integrale ellittico, essendo la funzione in z sotto al radicale del terzo grado. Per ridurlo alla forma normale ricorro alla sostituzione:

$$z = 1-\sqrt{2}\,\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi},$$

da cui deduco:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z)\left(z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\right)}} = \frac{1}{2^{1/4}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\varphi}},$$

[1] Questa figura fu disegnata colla nota costruzione geometrica che deriva immediatamente dall'equazione $r^2 = a\,.\,a\cos\vartheta$.

essendo

$$k^2 = \frac{8 + 5\sqrt{2}}{16}.$$

ed infine:

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{A} = 2\pi\gamma\delta a \left\{ 1 - \frac{3}{2^{3/4}} \int_{\arccos \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}^{\pi} \frac{(z^2 - z^5)\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right\},$$

essendo z la soprascritta funzione di φ, che si può anche scrivere così:

$$z = (1 + \sqrt{2}) - \frac{2\sqrt{2}}{1 - \cos\varphi}.$$

« Da ciò si vede che sviluppando si avranno tanti integrali della forma:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 - \cos\varphi)^h \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \int \frac{d\varphi}{(1 \cos\varphi)^h \Delta\varphi}, \qquad h = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

« Per ridurre ciascuno di questi integrali in integrali normali, comincio coll'esprimere il fratto $1/(1 - \cos\varphi)^h$ mediante somme di fratti delle forme $\mathrm{A}/\operatorname{sen}^{2n}\varphi$ e $\mathrm{B}\cos\varphi/\operatorname{sen}^{2n}\varphi$, essendo A e B dei numeri interi.

« Abbasso poi il grado n negli integrali $\int d\varphi/\operatorname{sen}^{2n}\varphi\,\Delta\varphi$ coll'aiuto della formola:

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^{2n}\varphi\,\Delta\varphi} = \frac{1}{2n-1} \left\{ -\frac{\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\operatorname{sen}^{2n-1}\varphi} + \right.$$

$$\left. + (2n-2)(1+k^2) \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^{2n-2}\varphi\,\Delta\varphi} - (2n-3)k^2 \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^{2n-4}\varphi\,\Delta\varphi} \right\};$$

e così abbassando successivamente non restano più che integrali delle due forme:

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \quad \text{e} \quad \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

cioè integrali ellittici di prima e di seconda specie.

« Gli altri integrali della forma $\int \cos\varphi\, d\varphi/\operatorname{sen}^{2n}\varphi\,\Delta\varphi$ sono algebrici e si risolvono coll'aiuto della formola:

$$\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\operatorname{sen}^{2n}\varphi\,\Delta\varphi} = -\frac{\Delta\varphi}{(2n-1)} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}^{2n-1}\varphi} + k^2 \frac{2n-2}{2n-3} \frac{1}{\operatorname{sen}^{2n-3}\varphi} + \right.$$

$$\left. + \cdots\cdots k^{2n-2} \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 1} \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \right\}.$$

« A questo punto non conviene di raggruppare insieme tutti i termini integrati e gli integrali di prima e seconda specie nella formola (3), perchè si avrebbero allora per il limite di integrazione π delle espressioni indeterminate $\infty - \infty$; conviene invece di mantenere per ora separato ciascuno degli integrali,

$$\int \frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^n \Delta\varphi},$$

giacchè allora numeratore e denominatore della parte integrata moltiplicati per sen φ, sono immediatamente divisibili per $(1+\cos\varphi)^n$ e con ciò si toglie il valore 0 al denominatore per il limite $\varphi = \pi$. Si ottiene in tal modo:

$$\int \frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)\Delta\varphi} = -\frac{\Delta\varphi \operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\varphi} + k^2 \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^2\Delta\varphi} = \frac{\Delta\varphi \operatorname{sen}\varphi}{3(1-\cos\varphi)^2}\left\{(1+4k^2)\cos\varphi - (2+4k^2)\right\} +$$
$$+ k^2 \frac{1+4k^2}{3} \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{2k^2}{3}\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^3\Delta\varphi} = \frac{\Delta\varphi \operatorname{sen}\varphi}{3.5(1-\cos\varphi)^3}\left\{(-2+2k^2-32k^4)\cos^2\varphi + \right.$$
$$\left. +(6+4k^2+64k^4)\cos\varphi - (7+6k^2+32k^4)\right\}$$
$$+ k^2 \frac{2-2k^2+32k^4}{3.5} \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} - k^2 \frac{1+16k^2}{3.5}\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^4\Delta\varphi} = \frac{\Delta\varphi \operatorname{sen}\varphi}{3.5.7(1-\cos\varphi)^4}\left\{(6-2k^2-128k^4+384k^6)\cos^3\varphi + \right.$$
$$+(-24+8k^2+288k^4-1152k^6)\cos^2\varphi +$$
$$+(39+26k^2-192k^4+1152k^6)\cos\varphi +$$
$$\left. +(-36-32k^2+32k^4-384k^6)\right\}$$
$$+ k^2 \frac{6-2k^2-128k^4+384k^6}{3.5.7} \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} +$$
$$+ k^2 \frac{-3+40k^2-192k^4}{3.5.7}\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^5 \Delta\varphi} = \frac{\Delta\varphi \operatorname{sen}\varphi}{3.5.7.9\,(1-\cos\varphi)^5} \Big\{ (-24+3k^2-72k^4+$$

$$+3648k^6-6144k^8)\cos^4\varphi$$

$$+(120-15k^2-144k^4-13056k^6+24576k^8)\cos^3\varphi$$

$$+(-252+33k^2+288k^4+17280k^4-36864k^8)\cos^2\varphi$$

$$+(300+207k^2+144k^4-9984k^6+24576k^8)\cos\varphi$$

$$+(-249-228k^2-216k^4+2112k^6-6144k^8)\Big\}$$

$$+k^2\,\frac{24-3k^2+72k^4-3648k^6+6144k^8}{3.5.7.9}\int\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}+$$

$$+k^2\,\frac{-12+1440k^4-3072k^6}{3.5.7.9}\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Si vede che per la parte integrata il limite π fornisce senz'altro il valore O. Introducendo dunque i limiti di integrazione e ricordando che:

$$\cos\varphi = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -3+2\sqrt{2},\quad k^2 = \frac{8+5\sqrt{2}}{16},\quad \Delta\varphi \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{-48+34\sqrt{2}},$$

$$k^2\int\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \Delta\varphi\, d\varphi,$$

si trova finalmente, scrivendo per il momento $\varphi_0 = \operatorname{arc}\cos(-3+2\sqrt{2})$:

$$\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{z^2-z^5}{\Delta\varphi}\, d\varphi =$$

$$-(38+27\sqrt{2})\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$+(232+166\sqrt{2})\left\{\frac{2+\sqrt{2}}{4}\sqrt{-48+34\sqrt{2}}+\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-\int_{\varphi_0}^{\pi}\Delta\varphi\, d\varphi\right\}$$

$$-\frac{552+400\sqrt{2}}{3}\left\{\frac{3+2\sqrt{2}}{8}(8-\sqrt{2})\sqrt{-48+34\sqrt{2}}+\frac{16+5\sqrt{2}}{8}\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-\right.$$

$$\left.-\frac{12+5\sqrt{2}}{4}\int_{\varphi_0}^{\pi}\Delta\varphi\, d\varphi\right\}$$

$$+\frac{640+480\sqrt{2}}{3.5}\left\{\frac{10+7\sqrt{2}}{32}(83-21\sqrt{2})\sqrt{-48+34\sqrt{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{122+65\sqrt{2}}{16}\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-\frac{122+75\sqrt{2}}{8}\int_{\varphi_0}^{\pi}\Delta\varphi\, d\varphi\right\}$$

$$-\frac{320+320\sqrt{2}}{3.5.7}\left\{\frac{17+12\sqrt{2}}{64}(1334-570\sqrt{2})\sqrt{-48+34\sqrt{2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1426+885\sqrt{2}}{32}\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}-\frac{1736+1165\sqrt{2}}{16}\int_{\varphi_0}^{\pi}\varDelta\varphi\, d\varphi\right\}$$
$$+\frac{128\sqrt{2}}{3.5.7.9}\left\{\frac{58+41\sqrt{2}}{256}(33351-19203\sqrt{2})\sqrt{48+34\sqrt{2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{21432+14115\sqrt{2}}{64}\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}-\frac{30342+20925\sqrt{2}}{32}\int_{\varphi_0}^{\pi}\varDelta\varphi\, d\varphi\right\}$$
$$=\frac{1}{3.5.7.9}\left\{(492+306\sqrt{2})\sqrt{-48+34\sqrt{2}}+(30-66\sqrt{2})\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}+\right.$$
$$\left.+132\sqrt{2})\int_{\varphi_0}^{\pi}\varDelta\varphi\, d\varphi\right\}. \qquad (4)$$

« E non resta più che di calcolare gli integrali normali di prima e seconda specie $F=\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$, $E=\int\varDelta\varphi\, d\varphi$ fra i limiti $\arccos(-3+2\sqrt{2})$ e π ovvero tra 0 ed $\arccos(3-2\sqrt{2})$, ossia gli integrali $F(\theta,\varphi)$, $E(\theta,\varphi)$ essendo il modulo $\theta=76°\,3'\,25'',9$ e l'amplitudine $\varphi=80°\,7'\,14'',59$.

« Perciò posto [1]:

$$k=\operatorname{sen}\theta\,,\ k_1=\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\,\theta=\operatorname{sen}\theta_1\,,\ k_2=\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\,\theta_1=\operatorname{sen}\theta_2\,,\ \ldots\ldots$$
$$k'=\cos\theta\,,\ k'_1=\qquad\cos\theta_1\,,\ k'_2=\qquad\cos\theta_2\,,\ \ldots\ldots$$
$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi)=k'\operatorname{tg}\varphi\,,\quad \operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=k'_1\operatorname{tg}\varphi_1\,,\ \ldots\ldots\,;$$

ho calcolato dapprima l'integrale completo

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}=\frac{\frac{1}{2}\,\pi}{\cos^2\frac{1}{2}\,\theta\cos^2\frac{1}{2}\,\theta_1\cos^2\frac{1}{2}\,\theta_2\ldots};$$

arrestandomi a θ_3 compreso ho trovato $\log k=0,4527859$.

« In seguito ho calcolato $F(76°\,3'\,25'',9\,;\ 80°\,7'\,14'',59)$ dalla formola:

$$F(\theta.\varphi)=\frac{2K}{\pi}\lim\frac{\varphi_n}{2^n},$$

arrestandomi ad $n=4$ e trovando $\log F=0,33615027$.

[1] Stante i valori elevati del modulo e dell'amplitudine non era da raccomandarsi il dedurre *per interpolazione* i valori di F, E dalle note tavole del Légendre.

« Finalmente ho calcolato E (76° 3′ 25″, 9 ; 80° 7′ 14″,59) dalla formola:

$$E(\theta,\varphi)=F(\theta,\varphi)\left(1-\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{4}k_1k_2+\dots\right)+$$
$$+k\left\{\frac{1}{2}\sqrt{k_1}\,\operatorname{sen}\varphi+\frac{1}{4}\sqrt{k_1k_2}\,\operatorname{sen}\varphi_1+\dots\right\}$$

e giungendo colla medesima approssimazione di prima al risultato $F=1{,}02351$.

« Sostituendo ora i valori ottenuti per F ed E nella formola (4) e poi nella (3) trova:

$$A=2\pi\gamma\delta a\times 0{,}39491.$$

L'attrazione al polo principale vale come è noto:

$$A_1=2\pi\gamma\delta a\times 0{,}40.$$

« Da ciò si vede che l'attrazione al secondo polo è poco minore di quella al polo principale; giacchè il rapporto della prima alla seconda vale:

$$0{,}9872.$$

« Infine essendo il volume V del corpo di massima attrazione dato da

$$V=\frac{4}{15}\pi a^3$$

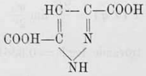
si ha rispettivamente:

$$A=2{,}6321\,\gamma\delta\sqrt[3]{V}\,,\quad A_1=2{,}6660\sqrt[3]{V}\,.$$

« Mi riservo di trattare in altre comunicazioni dell'interesse fisico che presenta la conoscenza del numero calcolato nella presente Nota, come pure di altri problemi riguardanti corpi di massima attrazione di dato tipo di forma ».

Chimica. — *Sopra alcuni nuovi composti pirazolici* (¹). Nota di G. MARCHETTI, presentata dal Corrispondente BALBIANO.

« Nella Nota presentata all'Accademia nella seduta del 22 Novembre 1891 diceva come per l'azione dell'idrogeno nascente svolto dal sodio ed alcool sul 1fenil3-5dimetilpirazolo, avendo ottenuto il dimetilpirazolo, avevo tentata l'ossidazione di questo con permanganato di potassio, allo scopo di ottenere l'acido bicarbopirazolico della formula:



(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.