ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

Matematica. — *La legge di probabilità degli errori d'osservazione.* Nota del prof. P. Pizzetti, presentata dal Socio Cremona.

« In un mio lavoro: *I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali* (1) del quale mi permetterò di offrire tra poco un esemplare a codesta illustre Accademia, ho trattata la teorica del metodo dei minimi quadrati, intrattenendomi specialmente sulle basi filosofiche di questa dottrina.

« Di un certo numero di postulati, o apertamente enunciati, o tacitamente ammessi, chiunque ha trattato di questa materia ha dovuto per necessità valersi. Stabilire chiaramente questi postulati, mettendo da parte i superflui, conservando solo quelli che rispondono ad un uniforme indirizzo di idee (2) e che appaiono *il meno possibile* arbitrarî, è di somma importanza, non solo dal punto di vista didattico, ma ancora, e più, per render sicuri i passi dello studioso che voglia o far progredire la teorica, ovvero applicarla alla critica dei risultati sperimentali. La legittimità delle applicazioni pratiche di una teorica, che, come questa, ha un carattere, in certa misura, convenzionale, dipende infatti, in ogni caso, da una precisa designazione dei principî sui quali la si intende fondata.

« Tacendo di altre parti del mio lavoro, mi permetto soltanto di richiamare oggi l'attenzione dell'Accademia su quel che riguarda la legge di probabilità degli errori. Ho messo da banda, a questo proposito, il modo di ragionare tenuto da Gauss nei suoi notissimi capitoli 177° e segg. della *Theoria motus* etc.; quello cioè di dedurre la detta legge dallo ammettere a priori che la media aritmetica di numeri dati da osservazioni di egual peso esprima, o esattamente o pressapoco, il valore più probabile. Astrazione fatta dai gravi difetti di questa deduzione (i quali difetti ho cercato di mettere in evidenza nell'*Appendice C* alla parte 1ª del mio lavoro), è fuor di dubbio che questo modo di fondare la teoria degli errori non dà alcun lume intorno alla legittimità delle applicazioni di tal teorica ai singoli casi particolari. Come e quando possiamo noi (specialmente se usciamo dal campo dell'astronomia, della geodesia, della fisica di precisione, per entrare in quello della statistica, delle scienze antropologiche ecc.) giudicare a priori che la media aritmetica dia il valor più conveniente da dedursi da una serie di numeri osservati?

« Parmi invece preferibile, anzi unica accettabile fra tutte, questa via: di stabilire a priori la forma della legge di probabilità degli errori, deducen-

(1) Negli « Atti della R. Università di Genova per il Centenario Colombiano ».

(2) In taluni trattati sul metodo dei minimi quadrati sono ammessi insieme principî di genere affatto diverso; il che dà luogo ad una confusione di idee, veramente contraria al progredire di questa dottrina.

dola dal vero e proprio carattere dell'errore accidentale, che è quello di esser generato *da un gran numero di cause diverse, delle quali non una, nè poche, siano di prevalente importanza rispetto alle altre.* Chiunque è pratico di ricerche sperimentali, sa benissimo che nelle misurazioni di precisione, eliminate le cause sistematiche di errore, l'errore accidentale, che rimane, risulta generato nel modo ora detto.

« Questo concetto intorno alla origine degli errori di osservazione è tutt'altro che nuovo. Lo si trova ammesso, in modo alquanto particolare e ristretto, in una breve memoria di Thomas Young (1), le idee del quale furono poi sviluppate negli scritti notissimi di Hagen (2) e di Quetelet (3). Più ampiamente inteso e svolto da Bessel (4) nelle sue classiche ricerche, e più recentemente da Crofton (5), questo principio è anche considerato come il vero e proprio fondamento delle teoria degli errori dai due illustri Inglesi G. B. Airy (6) e I. W. Glaisher (7).

« Com'è noto, partendo dal concetto ora enunciato, si può dimostrare che la probabilità che l'errore di una osservazione cada fra certi limiti, tende ad avere una espressione analitica molto semplice, quando si faccia crescere senza fine il numero delle cause di errore. È questa forma limite (il più delle volte ben verificata dai confronti sperimentali), quella che, per approssimazione, può servire a fondamento della teoria degli errori.

« La dimostrazione data da me, nel mio lavoro che ho annunciato, può considerarsi come più generale di quelle date da altri sin qui, per ciò che io ho fatto le ipotesi più ampie intorno alla natura delle cause di errore, non limitandomi a supporre che queste agiscano *in modo continuo* ma ammettendo che l'effetto di ciascuna di esse possa anche assumere un numero limitato di valori discreti. Ma ciò che sopratutto distingue la mia deduzione dalle precedenti sta in ciò, che fin ora, o ammettendo da principio che le cause d'errore sian tali da dare, con egual facilità, errori positivi e negativi, ovvero esprimendo direttamente questo concetto al termine della dimostrazione, si

(1) *Remarks on the probability of errors in physical observations* (Philos. Transactions for 1819, London).

(2) *Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Berlin, 1837).

(3) *Lettres. Sur la th. des probab.* etc. *Lettre* XVII° (Bruxelles, 1845).

(4) *Untersuchungen über die Wahrsch. der Beobachtungsfehler* (Astr. Nachr. XV).

(5) *On the proof of the law of errors* etc. (Philos. Transact. for 1870, London).

(6) *On the algebraical und numerical theory of errors* etc. (London, 1861).

(7) *On the law of facility of errors* (London Astron. Society XXXIX, 1872). Alle conclusioni enunciate qui sopra io era già arrivato prima di conoscere gli importanti lavori di Crofton, Airy e Glaisher. Fui ben lieto di trovare poi che le mie idee erano conformi a quelle di tali scrittori, i quali (come gl'Inglesi fanno in generale) portano tanta originalità e tanta indipendenza d'idee in questi studi che stanno fra il matematico e il filosofico.

giungeva al solito risultato che la funzione di probabilità degli errori ha, al limite, la notissima forma:

$$(1)\qquad \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}\,.$$

« In realtà, invece, il risultato più generale è questo, che la detta funzione di probabilità ha, al limite la forma

$$(2)\qquad \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 (x-a)^2}\,,$$

cosicchè, per fondare la ordinaria teoria degli errori, occorre un nuovo postulato, il quale ci abiliti a porre $a = 0$ nella espressione (2).

« Dire, senz'altro, che errori positivi e negativi di egual valor assoluto debbano presentarsi con egual facilità, non mi pare cosa abbastanza giustificata a priori. Invece la *necessità* nella quale ci troviamo di porre nella (2) $a = 0$ [1] mi sembra nel modo più diretto e più genuino espressa dal postulato seguente:

« Quando da una serie di osservazioni della stessa specie si deduce, per mezzo di una opportuna combinazione, il valore più conveniente di una quantità fisica, questo valore, così calcolato, dovrà, al crescere indefinito del numero delle osservazioni, approssimarsi indefinitamente al valore vero di quella quantità ».

« Questo postulato è una conseguenza del significato che l'osservatore deve necessariamente dare alla espressione « *vero valore di una quantità fisica* ». Quando la precisione delle indagini fisiche si supponga spinta oltre ogni limite, una definizione a priori del *vero valore* ci sfugge completamente; e ne resta possibile soltanto una definizione a posteriori. Quando l'osservatore, da successive serie *numerose* di osservazioni, deduce dei risultati medii tanto poco diversi fra loro da poterli ritenere uguali, a meno di quantità trascurabili, egli ritiene l'uno o l'altro di questi risultati come adatto ad esprimere il valor vero. È lecito dunque definire il *valor vero* di una quantità fisica come *il limite cui tende il risultato medio di più osservazioni quando il numero di queste cresce oltre ogni limite*. Qui per *risultato medio* intendiamo quello ottenuto con una qualsiasi opportuna combinazione delle osservazioni.

« La definizione data del valore vero è senza dubbio convenzionale, ma essa ci sembra indispensabile fondamento pei metodi del combinare le osservazioni. Affinchè tali metodi abbiamo un significato, è necessario che l'osservatore abbia a priori la convinzione che, all'aumentare indefinito del numero

[1] A meno che il valore di a non sia una quantità nota a priori, al quale caso accenniamo più innanzi.

delle osservazioni, il risultato medio di esse tenderà ad un limite fisso, il quale non abbia a mutare col mutare di istrumenti, di metodi, di teoriche.

« Ammessa una tale definizione del valor vero, ovvero, ciò che è lo stesso, stabilito il principio poco innanzi enunciato, si dimostra facilmente che, nella espressione (2), la costante a deve necessariamente essere o *nulla* o *nota* a priori. Se è nulla, si ricade nella formula (1). Se è nota a priori, essa può essere sottratta da ciascuno dei valori osservati, e questi, corretti così, risulteranno alla lor volta soggetti alla legge di probabilità espressa dalla (1).

« Ometto le deduzioni analitiche, che si trovano per disteso nel mio lavoro menzionato da principio, e che del resto è ben facile ad ognuno di immaginare ».

Matematica. — *Su due congruenze di rette di secondo ordine di sesta classe.* Nota del prof. D. MONTESANO, presentata dal Corrispondente PINCHERLE.

Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Misura della resistenza elettrica dello zinco e dell'antimonio fusi per mezzo di alcune loro leghe.* Studio sperimentale di G. VICENTINI e C. CATTANEO, presentato dal Socio BLASERNA.

« Dietro a quanto avevamo promesso nell'ultima nostra Nota, diamo qui i risultati della misura delle resistenze elettriche di alcune amalgame e varie leghe, di zinco e di antimonio, e ciò allo scopo di poter ricavare con una sufficiente approssimazione, il valore della resistenza elettrica specifica di tali corpi, fusi, senza bisogno di eseguire le esperienze alla elevata loro temperatura di fusione.

« Nei calcoli che facciamo per ricavare dalla solita formula

$$\varrho_c = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 v_2 + v_1 \varrho_2} (v_1 + v_2)$$

(nella quale ora ϱ_c si deve sostituire col valore della resistenza ϱ trovata delle amalgame e delle leghe) il valore ϱ_2 della resistenza elettrica dello zinco e dell'antimonio, è necessario conoscere il volume dello zinco o dell'antimonio, che si trovano nelle leghe allo stato di fusione. Tale volume lo calcoliamo in base alla densità ed al coefficiente di dilatazione dei due corpi, già da noi misurati indirettamente collo studio delle leghe.