ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 febbraio 1892.

F. Brioschi Presidente

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle trasformazioni Cremoniane del piano che ammettono una curva fissa.* Nota del prof. Guido Castelnuovo, presentata dal Socio Cremona.

« In un recente lavoro pubblicato sotto questo titolo (1) il sig. Doehlemann si occupa di quelle trasformazioni Cremoniane fra due piani sovrapposti che *ammettono una curva* M *di punti uniti* (vale a dire che trasformano in sè stesso ogni punto di M). I caratteri di siffatte trasformazioni, considerati dal sig. Doehlemann, si alterano quando al piano di M si faccia subire una trasformazione univoca. Io invece faccio attenzione ai caratteri invariantivi per trasformazioni univoche, e giungo così a stabilire che ogni trasformazione del Doehlemann, quando il genere di M supera 1, o è ciclica o è riduttibile al tipo Jonquières.

« Per le considerazioni seguenti è fondamentale il concetto di *sistema aggiunto puro ad una curva* M; e perciò riporto qui la definizione che ho dato nel § 27 delle mie *Ricerche generali sopra i sistemi lineari* (2).

(1) Mathem. Annalen. Bd. 39, pag. 567.

(2) Memorie della R. Accad. delle Scienze. Torino, 1891.

« Se M è una curva irriduttibile d'ordine m e genere $p > 1$, il sistema lineare ∞^{p-1} costituito dalle curve d'ordine $m-3$ aggiunte ad M presenta uno dei due casi seguenti:

1) o due curve generiche del sistema hanno solo un numero finito di punti comuni,

2) o tutte le curve del sistema hanno una parte comune.

« Il sistema stesso, nel caso 1); oppure il sistema che si ottiene facendo astrazione dalla parte comune, nel caso 2), dicesi *sistema aggiunto puro* ad M. Esso è ∞^{p-1}, e la sua curva generica o è irriduttibile, od è costituita da $p-1$ curve generiche di un fascio (per un noto teorema del sig. Bertini sui sistemi lineari riduttibili).

« Il teorema che mette in luce l'importanza del sistema aggiunto puro è il seguente:

« Se una trasformazione birazionale del piano muta la curva M in una curva M*, la stessa trasformazione muterà il sistema aggiunto puro ad M nel sistema aggiunto puro ad M* (1). È chiaro che basta dimostrare il teorema per una trasformazione quadratica; e tutto si riduce (v. le mie *Ricerche* l. c.) a calcolare l'ordine e le singolarità di M*, ed a confrontarle cogli analoghi caratteri della curva in cui si trasforma una curva aggiunta pura ad M.

« Veniamo ora al caso nostro. Una trasformazione birazionale T fra due piani sovrapposti muti ogni punto della curva M in se stesso. Supponiamo che M sia irriduttibile, senza escludere che possano esistere altre curve di punti uniti in T; e supponiamo inoltre che il genere p di M superi 1. Allora per il teorema fondamentale la trasformazione T dovrà mutare il sistema aggiunto puro ad M in se stesso. Indichiamo con M′ la curva generica di questo sistema, se essa è irriduttibile; oppure con M′ la curva generica di quel fascio di cui $p-1$ curve costituiscono una curva aggiunta pura ad M, se il sistema aggiunto puro è riduttibile: nell'uno e nell'altro caso sia [M′] il sistema composto dalle curve M′. È chiaro (anche nel secondo caso) che [M′] sarà mutato in sè stesso da T.

« Ma si può dire di più: *ogni curva di* [M′] *è mutata in sè stessa da* T. Infatti se la curva M′ fosse mutata in un'*altra* curva M'_1 del sistema [M′], le intersezioni di M ed M′ situate fuori dei punti base

(1) Il teorema riesce utile in tutte le ricerche sopra trasformazioni birazionali che mutano una curva, un sistema lineare ... in sè stesso. Così il teorema permette di risolvere l'importante questione della riduzione a tipi fondamentali delle trasformazioni involutorie del piano, questione studiata a fondo, ma non completamente esaurita da un ben noto lavoro del sig. Bertini. Questo argomento mi propongo di trattare in seguito, a meno che un lavoro del sig. Kantor (sulle trasformazioni cicliche) scritto già da qualche anno e di prossima pubblicazione, non contenga la desiderata risposta, come qualche indizio lascierebbe credere.

di [M'] (intersezioni il cui numero è $2p-2$ o 2 secondo che la dimensione di [M'] è $p-1$ o 1) dovrebbero trovarsi anche su M'_1 e quindi sopra ogni curva del fascio (M', M'_1), perchè esse intersezioni sono fisse in T. Ma allora la curva del fascio stesso condotta per un punto generico di M, avrebbe con M una intersezione di più di quello che consentano gli ordini m, m' di M, M', e quindi dovrebbe contenere tutta la M; ma ciò è impossibile perchè

$$m' \leqq m-3.$$

« Ora distingueremo tre casi.

« I) M' sia *razionale.* Fissato un fascio di curve M', applichiamo al nostro piano quella trasformazione birazionale Θ che è atta a mutare il fascio di M' in un fascio di rette. La Θ muterà la trasformazione T in un'altra T* che lascierà invariate le singole rette di un fascio. Dunque la T* è una trasformazione Jonquières; e *la* T *primitiva è riduttibile al tipo Jonquières.* La curva M è, in tal caso, iperellitica.

« II) M' sia *ellittica*; *a)* ma per ora *nè armonica, nè equianarmonica.* La corrispondenza (1, 1) che la T determina sopra ogni M' ha certo qualche punto unito, perchè M' incontra in qualche punto, fuori dei punti base, la curva unita M. Dunque la corrispondenza (1, 1), per note proprietà della curva ellittica [1], è necessariamente una *involuzione razionale.* Dal che segue subito che la trasformazione T è *involutoria.* E inoltre (indipendentemente dalle ricerche già fatte sulle corrispondenze involutorie) che la varietà delle ∞^2 coppie di punti coniugati in T è *razionale*; infatti ciascuna curva M' contiene una serie razionale ∞^1 di coppie, e tutte le ∞^2 coppie si ottengono (senza ripetizioni) quando si consideri un fascio di curve M'; sicchè alla varietà delle ∞^2 coppie si può applicare un noto teorema del sig. Nöther, secondo il quale è razionale una superficie (varietà ∞^2 di punti), la quale contenga un fascio razionale di curve razionali [2].

« *b)* M' sia *ellittica armonica.* La corrispondenza (1, 1) determinata sopra di essa da T, o è involutoria razionale, e allora si ragioni come nel caso *a)*, oppure è ciclica di 4° grado (vale a dire i cicli si compongono di 4 punti) con due punti uniti, i quali devono costituire le intersezioni variabili di M ed M', sicchè M in tal caso è iperellitica. La corrispondenza T sarà adunque *ciclica di 4° grado*; il suo quadrato sarà una corrispondenza involutoria avente come uniti oltre ai punti di M, due punti sopra ogni M', i quali si corrispondono involutoriamente in T.

« *c)* M' sia *ellittica equianarmonica.* La corrispondenza (1, 1) su M', se è singolare (chè altrimenti si giungerebbe ai risultati di *a)*) non può avere

(1) Per la teoria geometrica di siffatte corrispondenze si veda Segre, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche.* Atti dell'Acc. d. Scienze di Torino, vol. XXIV.

(2) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Mathem. Annalen, Bd. 3.

un solo punto unito, perchè allora dovrebbe la M esser razionale contro l'ipotesi. Dunque quella corrispondenza avrà tre punti uniti e sarà ciclica di 3° grado. E in conseguenza la trasformazione T risulterà pure *ciclica di 3° grado*, e avrà come uniti i punti di M (due sopra ogni M′, sicchè ancora M è iperellittica), ed un punto ulteriore sopra ogni M′.

« III) M′ abbia il genere $p' > 1$; arriveremo alle stesse conchiusioni del caso II), *a*). Consideriamo infatti il sistema aggiunto puro a M′, il quale è almeno ∞^1. Definendo la curva M″ rispetto ad M′ nello stesso modo come fu definita la M′ rispetto ad M, vedremo subito che la T deve trasformare il sistema delle M″ in sè stesso, ed anzi (poichè l'ordine di M″ è inferiore ad m) ciascuna curva M″ in sè stessa. Adunque le curve M″ che passano per un punto generico a di M′ passano anche per il punto a^* di M′ che corrisponde ad a nella trasformazione T. Ora poichè la coppia $a\,a^*$ di M′ presenta una sola condizione ad ogni curva M″ (quindi ad ogni curva d'ordine $m' - 3$ aggiunta ad M′) che debba contenerla, segue che M′ è una curva iperellittica e che a ed a^* sono coniugati nella sua involuzione razionale g^1_2. Dunque di nuovo a ed a^* si corrispondono involutoriamente, vale a dire la trasformazione T è *involutoria*; e di nuovo, (poichè le coppie di punti coniugati sopra una M′ costituiscono una ∞^1 razionale) la varietà delle ∞^2 coppie di punti coniugati in T è *razionale*.

« Sicchè finalmente possiamo enunciare il teorema :

« Se una trasformazione Cremoniana fra due piani sovrapposti muta in sè stesso ciascun punto di una curva irriduttibile M di genere superiore ad 1, la trasformazione o è riduttibile al tipo Jonquières, oppure è ciclica di 2°, 3° o 4° grado.

« Se poi, nel caso delle trasformazioni cicliche di 2° grado (involutorie), si approfitta, sia delle ricerche del sig. Bertini sulle trasformazioni involutorie del piano (¹), sia dei risultati ottenuti dal sig. Nöther sulle corrispondenze (1 , 2) fra due piani (²), si arriverà alla proposizione

« Se ciascun punto di una curva piana irriduttibile M di genere superiore a 4 è mutato in sè stesso da una trasformazione Cremoniana del piano, la curva M è iperellittica; e la trasformazione è riduttibile al tipo Jonquières, o (forse) è ciclica del 3° grado ».

(¹) *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*. Annali di Matematica, serie 2ª, tomo VIII.

(²) *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen*. Sitzungsber. d. physik. medicin. Societät zu Erlangen, 1878.