ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

Matematica. — *Due proposizioni della teoria dei numeri e loro interpretazione geometrica.* Nota di Giovanni Frattini, presentata dal Socio Beltrami.

« In un recente mio lavoro [1], trattando la risoluzione dell'equazione
$$x^2 - Dy^2 = \pm N \ (^2)$$
in numeri interi, con metodo a mio credere nuovo, certamente diverso da quello di Lagrange [3], riportato da Legendre nel tomo I della *Théorie des nombres* [4], ho dimostrato i due teoremi seguenti, nella enunciazione dei quali α e β indicano i valori della x e della y in una soluzione *qualsiasi* dell'equazione
$$x^2 - Dy^2 = 1,$$
diversa dalla soluzione evidente (1, 0) dell'equazione medesima.

« I. Intendendo per (k, h) una soluzione dell'equazione
$$x^2 - Dy^2 = N, \tag{a}$$
scelta in tutti i modi possibili fra quelle nelle quali il valore della y è minore di
$$\beta \sqrt{N}$$
(e conseguentemente $x < \alpha \sqrt{N}$), tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione sono date dalla formola
$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^m, \tag{A}$$
ponendo in essa consecutivamente $m = 0, 1, 2$, ecc., ed eguagliando poscia le parti razionali dei due membri, nonchè i coefficienti di $\sqrt{D}$. — Le soluzioni che così si ottengono crescono [5] al crescere di m, e, per ogni particolar valore di m, al crescere della soluzione (k, h), entro i limiti assegnati alla h e alla k.

(1) V. il « Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario » (Anno VI, fasc. VI).

(2) In questa Nota le lettere significheranno sempre numeri interi e positivi.

(3) V. la Memoria: *Sur la solution des problèmes indéterminés du second dégré.* E l'altra: *Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers.*

(4) Per ciò che riguarda i molti vantaggi pratici e teorici del primo metodo, dirò soltanto che quello di Lagrange fu riconosciuto malagevole dallo stesso Autore, nella prefazione alla seconda delle Memorie ricordate di sopra « a cagione del grande numero di casi dei quali bisogna tener conto ». La nuova maniera evita tale molteplicità di casi: e ciò, oltre al facilitare la risoluzione pratica dei problemi, serve a rendere visibili molte belle proprietà, che difficilmente si appaleserebbero in una men raccolta trattazione dell'argomento.

(5) Evidentemente x ed y crescono o diminuiscono insieme. Per rispetto ai valori della x e della y si avranno pertanto soluzioni maggiori e soluzioni minori.

« II. Intendendo per (k, h) una soluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = -N, \tag{b}$$

scelta in tutti i modi possibili fra quelle nelle quali il valore di y non supera

$$\sqrt{\frac{N(\alpha+1)}{2D}}$$

$\left(\text{dal che segue che } x \text{ non supera } \sqrt{\frac{N(\alpha-1)}{2}}\right)$ [1], tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione sono date dalla formola

$$x+y\sqrt{D} = (\pm k + h\sqrt{D})(\alpha+\beta\sqrt{D})^m \ [2], \tag{B}$$

ponendo in essa consecutivamente $m = 0, 1, 2$, ecc., ed egualiando poscia le parti razionali dei due membri, nonchè i coefficienti di $\sqrt{D}$. — Le soluzioni che così si ottengono crescono al crescere di m, e, per ogni particolare valore di m, al crescere del valore algebrico di $\pm k$, entro i limiti ad essa assegnati [3].

« In questa Nota deduco dai teoremi precedenti due conseguenze notabili, le quali ammettono una elegante interpretazione geometrica, che espongo in fine.

« 1. Chiamo (p_0, q_0), (p_1, q_1), (p_2, q_2) ecc. le successive soluzioni dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1, \tag{C}$$

e le suppongo disposte in ordine per ragion di grandezza, incominciando dalla $(1, 0)$.

« Se per (α, β) si sceglie la (p_1, q_1), la formola (A) diviene:

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})(p_1 + q_1\sqrt{D})^m. \tag{D}$$

(1) Queste limitazioni, riferite alla sola soluzione minima dell'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$ (ma non le altre due $\beta\sqrt{N}$ ed $\alpha\sqrt{N}$, nè le formole (B) ed (A)) occorsero al sig. Tchebicheff in alcune ricerche riguardanti le forme quadratiche (V. la Memoria: *Sur les formes quadratiques* nel « Journal de mathématiques pures et appliquées », 1851). Tuttavia la loro importanza per rispetto alla risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ non è avvertita dall'Autore. Nè poteva esserlo: e perchè le dette limitazioni sono insufficienti alla risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, occorrendo considerare invece le due $\beta\sqrt{N}$, $\alpha\sqrt{N}$, come è detto nel teorema I: e perchè delle formole (B) ed (A) non si fa cenno nella Memoria dello Tchebicheff.

(2) Per $m = 0$ bisogna rifiutare il segno negativo davanti alla k.

(3) Quando il limite superiore assegnato alla h è valore della y esso stesso, la soluzione massima relativa ad un determinato valore m_1 di m è la stessa che la soluzione minima relativa al valore $m_1 + 1$ di essa m, come osservai nel ricordato mio lavoro. Tutto il resto procede a seconda del teorema generale.

Volendo applicare questa formola alla risoluzione della (C), bisognerà, ponendo mente alle limitazioni imposte dal teorema I alla h e alla k, fare in essa $k = 1$, $h = 0$. Il secondo membro diverrà

$$(p_1 + q_1 \sqrt{D})^m,$$

ed eguagliato a $p_i + q_i \sqrt{D}$, darà tutte le soluzioni (p_i, q_i) della (C) (1). Pertanto la (D) si potrà scrivere così:

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})(p_i + q_i\sqrt{D}). \qquad \text{(E)}$$

Per k ed h si dovranno intendere i valori di x e di y in soluzioni della (a) per le quali si verifichi la condizione $h < q_1 \sqrt{N}$.

« Relativamente alla (b) si avrà poi:

$$x + y\sqrt{D} = (\pm k + h\sqrt{D})(p_i + q_i\sqrt{D}). \qquad \text{(F)}$$

In questa formola k ed h denoteranno i valori della x e della y in soluzioni della (b) per le quali si verifichi la condizione

$$h \leqq \sqrt{\frac{N(p_1+1)}{2D}}. \ (2).$$

« Ed ora, per la miglior trattazione dell'argomento, occorre premettere i due principî seguenti, facilmente verificabili.

a) Un'eguaglianza o disuguaglianza della forma

$$a + b\sqrt{D} \gtreqqless \sqrt{N}\,(p + q\sqrt{D}),$$

qualora (a, b), (p, q) siano ordinatamente soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ e dell'altra $x^2 - Dy^2 = 1$, è equivalente al sistema delle due

$$a \gtreqqless p\sqrt{N}\,; \ b \gtreqqless q\sqrt{N} \ (3).$$

(1) Si ottiene così, come caso particolarissimo, la nota formola di risoluzione dell'equazione di Pell (V. p. es. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 85).

(2) Che dal combinare una soluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ con tutte quelle della $x^2 - Dy^2 = 1$ nella maniera indicata dalle formole (E) ed (F) si derivino infinite soluzioni della prima equazione, fu già osservato da Eulero: d'altra parte la regola di Eulero era nota ai geometri Indiani da lunghissimo tempo (V. la Memoria di Chasles, *Sur les équations indéterminées du second degré* nel « Journal de mathématiques pures et appliquées ». 1837). Peraltro Eulero credette che per ottenere tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ bastasse combinarne una sola soluzione con tutte quelle della relativa equazione di Pell. Tale opinione è confutata nella prima delle due Memorie di Lagrange, citate di sopra. I teoremi I e II, dimostrati nel precedente mio lavoro, e le conseguenti formole (E) ed (F), dicono assai di più; perchè definiscono le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ che è *necessario* e *sufficiente* combinare con quelle della relativa equazione di Pell, e come la combinazione debba essere regolata, per rispetto ai segni delle quantità k, h, p_i, q_i, se si vogliono ottenere, senza ripetizione alcuna, tutte le soluzioni dell'equazione proposta.

(3) Per la verificazione basta osservare che una di queste due disuguaglianze è conseguenza dell'altra.

b) Un' eguaglianza o disuguaglianza della forma

$$a' + b'\sqrt{D} \gtreqless \sqrt{N}\sqrt{p + q\sqrt{D}} = \sqrt{N}\left(\sqrt{\frac{p-1}{2}} + \sqrt{\frac{p+1}{2}}\right),$$

qualora (a', b'), (p, q) siano ordinatamente soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$ e dell'altra $x^2 - Dy^2 = 1$, è equivalente al sistema delle due

$$a' \gtreqless \sqrt{\frac{N(p-1)}{2}}; \quad b' \gtreqless \sqrt{\frac{N(p+1)}{2D}} \text{ (1)}.$$

« 2. Esaminiamo la formola (E). Per $i = 0$ essa fornisce quelle soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, nelle quali $y < q_1\sqrt{N}$. Se ne dica λ il numero. — Per $i = 1$ il secondo membro della (E) diviene

$$(k + h\sqrt{D})(p_1 + q_1\sqrt{D}).$$

Avendosi

$$(k + h\sqrt{D})^2 \geqq N,$$

perchè $k^2 - Dh^2 = N$, esso non sarà minore di

$$\sqrt{N}(p_1 + q_1\sqrt{D});$$

mentrechè, per essere $h < q_1\sqrt{N}$ e conseguentemente $k < p_1\sqrt{N}$, sarà minore di

$$\sqrt{N}(p_1 + q_1\sqrt{D})^2 = \sqrt{N}(p_2 + q_2\sqrt{D}).$$

« Segue, ricordando il principio *a*), che nelle soluzioni fornite dalla (E) per $i = 1$, i valori della y non sono minori di $q_1\sqrt{N}$, ma sono minori di $q_2\sqrt{N}$. D'altra parte, per il teorema I, essi sono fra loro diversi. Dunque entro i limiti $q_1\sqrt{N}$ e $q_2\sqrt{N}$ della y si troveranno λ soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, tante quante se ne trovano fra 0 e $q_1\sqrt{N}$. E non di più: perchè si dimostrerebbe similmente che le λ soluzioni seguenti si trovano fra i limiti $q_2\sqrt{N}$ e $q_3\sqrt{N}$ della y. E via così. — Di qui il teorema:

« Se 0, q_1, q_2, ecc. sono i valori della y nelle successive soluzioni intere e positive dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

la serie

$$0, \quad q_1\sqrt{N}, \quad q_2\sqrt{N}, \quad q_3\sqrt{N}, \ldots$$

separa le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

per modo, che il numero delle soluzioni nelle quali il valore della y eguaglia o supera un qualunque numero della serie ed è minore del seguente, è costante.

(1) Per la verificazione basta osservare che una di queste due disuguaglianze è conseguenza dell'altra.

« 3. Veniamo alla formola (F). Per $i=0$, rifiutato il segno — davanti alla k, essa fornisce λ' soluzioni dell'equazione $x^2-Dy^2=-N$: quelle nelle quali y non supera

$$\sqrt{\frac{N(p_1+1)}{2D}},$$

e conseguentemente x non supera

$$\sqrt{\frac{N(p_1-1)}{2}}.$$

« Per $i=1$, dato alla k il segno negativo, il secondo membro della formola diviene

$$(-k+h\sqrt{D})(p_1+q_1\sqrt{D}).$$

Ora, per essere

$$k\leqq\sqrt{\frac{N(p_1-1)}{2}};\quad h\leqq\sqrt{\frac{N(p_1+1)}{2D}}$$

e inoltre

$$(-k+h\sqrt{D})^2\leqq N,$$

perchè $Dh^2-k^2=N$, si trova facilmente che

$$(-k+h\sqrt{D})(p_1+q_1\sqrt{D})\geqq\sqrt{N}\sqrt{p_1+q_1\sqrt{D}}.$$

E che

$$(-k+h\sqrt{D})(p_1+q_1\sqrt{D})\leqq\sqrt{N}(p_1+q_1\sqrt{D})=\sqrt{N}\sqrt{p_2+q_2\sqrt{D}}.$$

« Da ciò risulta, in grazia del principio b), che i λ' valori di y relativi ad $i=1$ e alla scelta del segno negativo per la k, sono compresi fra i limiti

$$\sqrt{\frac{N(p_1+1)}{2D}},\quad\sqrt{\frac{N(p_2+1)}{2D}},$$

non esclusi i limiti stessi. — I λ' valori di y relativi ad $i=1$ e alla scelta del segno positivo per la k risulterebbero compresi tra i limiti

$$\sqrt{\frac{N(p_2+1)}{2D}}\quad\sqrt{\frac{N(p_3+1)}{2D}}.$$

E via così. — Dunque:

« Se 1, p_1, p_2, ecc. sono i valori di x nelle successive soluzioni intere e positive dell'equazione

$$x^2-Dy^2=1,$$

la serie

$$0,\sqrt{\frac{N(p_1+1)}{2D}},\sqrt{\frac{N(p_2+1)}{2D}},\sqrt{\frac{N(p_3+1)}{2D}},\ldots$$

separa le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$x^2-Dy^2=-N$$

per modo, che il numero delle soluzioni nelle quali il valore della y è compreso fra due numeri consecutivi della serie (inclusi questi) è costante.

« 4. Per interpretare geometricamente i due teoremi testè dimostrati, ci riferiremo ad un sistema di coordinate Cartesiane ortogonali, e immagineremo il quadrante compreso dagli assi delle x e delle y positive diviso in quadrati di lato eguale all'unità. Diremo inoltre nodi di un'equazione della forma $x^2 - Dy^2 = \pm N$ quei nodi della figura, le coordinate dei quali sono valori della x e della y in soluzioni dell'equazione. Ferma restando D, il raggio che parte dall'origine degli assi ed è inclinato all'asse delle x di un angolo avente per tangente $1:\sqrt{D}$ (assintoto comune a tutte le iperbole $x^2 - Dy^2 = \pm N$) separerà i nodi delle equazioni il cui secondo membro è positivo da quelli delle equazioni il cui secondo membro è negativo. Lo chiameremo *raggio limite* della rappresentazione.— Consideriamo l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$. La condizione $y \gtreqless q_i\sqrt{N}$, relativa ad una qualunque delle sue soluzioni, equivale alla

$$y:x \gtreqless q_i:p_i\,,$$

come facilmente si può verificare. Il che significa che la tangente dell'anomalia del punto (x, y) è maggiore della tangente dell'anomalia del punto (p_i, q_i) (e conseguentemente la prima anomalia maggiore della seconda), se $y > q_i\sqrt{N}$; che la prima anomalia è minore della seconda o uguale ad essa, secondochè $y < q_i\sqrt{N}$ oppure $y = q_i\sqrt{N}$. Pertanto il teorema dimostrato nel n. 2, geometricamente tradotto, diverrà :

« I vettori delle successive soluzioni dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1\ (^1)$$

dividono (2) l'angolo compreso dall'asse delle x positive e dal raggio limite in angoli consecutivi, ciascuno dei quali contiene un egual numero di nodi dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N\ (^3).$$

« 5. Chiameremo *punti nodali* dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -1$ i punti di coordinate $p_0 - 1$, q_0; $p_1 - 1$, q_1; $p_2 - 1$, q_2; ecc. Questi punti e i relativi vettori esistono evidentemente, anche quando l'equazione $x^2 - Dy^2 = -1$ è impossibile in numeri interi. Se poi l'equazione è possibile, il sistema dei vettori dei punti nodali comprende il sistema dei vettori di tutti i nodi dell'equazione. Detta infatti (r, s) una soluzione della $x^2 - Dy^2 = -1$, sup-

(1) Per vettore di una soluzione intendasi il vettore del relativo nodo.

(2) Che si tratti d'una divisione propriamente detta, si dimostra osservando che il rapporto $q_i:p_i$ cresce al crescere della soluzione (p_i, q_i), a cagione della relazione $p_i^2 - Dq_i^2 = 1$. Conseguentemente le anomalie dei punti (p_0, q_0), (p_1, q_1) ecc. vanno crescendo.

(3) Il primo lato di ciascun angolo dev'essere compreso ed il secondo escluso.

posta possibile, $(2r^2+1, 2rs)$ sarà soluzione della $x^2 - Dy^2 = 1$. Si avrà dunque, per un certo valore dell'indice θ,

$$p_\theta = 2r^2 + 1 \; ; \quad q_\theta = 2rs .$$

« Il rapporto fra q_θ e $p_\theta - 1$ è $s:r$; e ciò prova che la direzione del vettore di (r, s) coincide con quella del vettore di un punto nodale.

« Ciò premesso, è facile verificare che la condizione

$$y \gtreqless \sqrt{\frac{N(p_i+1)}{2D}} ,$$

relativa alla y di una soluzione della $x^2 - Dy^2 = -N$, equivale all'altra:

$$y:x \gtreqless q_i : p_i - 1 .$$

« Il teorema del n. 3, reso geometrico, si tradurrà dunque nel seguente:

« I vettori dei successivi punti nodali dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

dividono l'angolo compreso dall'asse delle y positive e dal raggio limite in angoli consecutivi, ciascuno dei quali contiene un egual numero di nodi dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = -N \;(^1) \text{ »}.$$

Fisica. — *Fenomeni luminosi provocati nei gas rarefatti dalle scariche elettriche attraverso a conduttori continui.* Studio sperimentale di Giuseppe Vicentini, presentato dal Socio Blaserna.

« Le scariche elettriche attraverso a conduttori sottili, possono dare luogo nell'aria a scariche laterali che si manifestano con fenomeni luminosi. Questo fatto si osserva pure nell'aria rarefatta, ed anzi in tale caso bastano scariche che nell'aria a densità ordinaria non producono fenomeni visibili, per provocare effetti assai appariscenti. In queste condizioni però i conduttori dovendo essere fissati nell'interno di recipienti di vetro nei quali si eseguisce la voluta rarefazione, si ottengono scariche di forme speciali, dovute in parte ai fenomeni di influenza provocati dalle pareti.

« Ho esaminato tali forme di scariche, e a questo studio fui indotto per poter trarre con maggiore sicurezza qualche conclusione sui fenomeni luminosi provocati dai conduttori avviluppati ad elica, in seno all'aria rarefatta. In tale studio ho raccolto un numero abbastanza grande di prove fotografiche delle

(1) Sono da includersi i due lati di ciascun angolo.