ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

LYNCÆI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1892.

F. Brioschi Presidente

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sull'espressione analitica del principio di Huygens.* Nota del Socio Eugenio Beltrami.

« L'esatta espressione analitica del principio di Huygens è stata data da Kirchhoff (nella Memoria *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, 1882), mercè un'ingegnosa applicazione del teorema di Green: essa serve oggimai di base alla teoria razionale dei più fondamentali fenomeni ottici. In una mia Nota del 1889 *Sul principio di Huygens* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo) ho tratto occasione da qualche appunto formulato in proposito dal prof. G. A. Maggi per proporre alcune varianti alla deduzione di Kirchhoff; la quale, così modificata, è stata accolta dal sig. P. Duhem nel suo interessante Corso d'idrodinamica, elasticità ed acustica (Parigi 1891).

« Senonchè, riprendendo in esame quest'argomento, ho riconosciuto che la deduzione in discorso può essere ancora notevolmente semplificata e che, in ispecie, può venirne eliminata ogni molesta distinzione d'integrali *proprii* ed *improprii*; e ciò col generalizzare, in un senso diverso dall'ordinario, la formola di Green. Mi propongo di qui esporre il definitivo procedimento di dimostrazione cui così si perviene, approfittando dell'occasione per indicare un'ulteriore estensione che si può dare al risultato finale e da cui si possono trarre alcune utili conclusioni.

« Sia S uno spazio qualunque (che giova dapprima supporre finito), σ la superficie che lo limita, n la normale interna di questa, r la distanza d'un qualunque elemento dS o $d\sigma$ da un *polo* arbitrario, ma fisso: sieno inoltre φ ed F due funzioni delle coordinate x, y, z dei punti di S monodrome, continue, finite e derivabili, insieme colle loro derivate prime. Dall'identità seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial x}-F\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{1}{r}\right]=\left(\varphi\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-F\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\frac{1}{r}-\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial x}-F\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{1}{r^2}$$

e dalle due analoghe, osservando essere

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial r},$$

si deduce:

$$\sum\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial x}-F\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{1}{r}\right]=(\varphi\Delta_2 F-F\Delta_2\varphi)\frac{1}{r}-\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial r}-F\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\frac{1}{r^2};$$

epperò, integrando su tutto lo spazio S, si può scrivere:

$$\int(\varphi\Delta_2 F-F\Delta_2\varphi)\frac{dS}{r}+\int\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial n}-F\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\frac{d\sigma}{r}$$
$$+\int\left\{\frac{\partial(F\varphi)}{\partial r}-2\varphi\frac{\partial F}{\partial r}\right\}\frac{dS}{r^2}=0.$$

Ora in virtù d'un teorema di Gauss, traduzione pressochè intuitiva del processo d'integrazione per coordinate polari, si ha

$$\int\frac{\partial(F\varphi)}{\partial r}\frac{dS}{r^2}=\int F\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma-(\sigma)_0F_0\varphi_0;$$

dove F_0, φ_0 sono i valori delle funzioni F, φ nel polo e $(\sigma)_0$ è, rispetto a questo punto, l'angolo visuale della superficie σ; dietro ciò si ottiene:

$$(\sigma)_0F_0\varphi_0=\int\left(\varphi\frac{\partial\frac{F}{r}}{\partial n}-\frac{F}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma$$
$$+\int(\varphi\Delta_2F-F\Delta_2\varphi)\frac{dS}{r}-2\int\varphi\frac{\partial F}{\partial r}\frac{dS}{r^2}.$$

Se quindi si suppone che F dipenda dal solo raggio vettore r, nel qual caso è

$$\Delta_2 \mathrm{F} = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r},$$

si ha semplicemente:

$$(1) \quad (\sigma)_0 \mathrm{F}_0 \varphi_0 = \int \left(\varphi \frac{\partial \frac{\mathrm{F}}{r}}{\partial n} - \frac{\mathrm{F}}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma + \int \left(\varphi \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r^2} - \mathrm{F} \Delta_2 \varphi \right) \frac{d\mathrm{S}}{r};$$

e questa formola, analoga ma non identica a quella di Green, è la più idonea alla deduzione del principio di Huygens.

« Tale deduzione si fa supponendo che la funzione φ dipenda non solo dalle coordinate, ma anche dal tempo t e soddisfaccia all'equazione dei moti oscillatorii liberi:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi,$$

dove a è la velocità di propagazione. Ma qui, per dare al risultato quell'ulteriore estensione cui ho alluso più sopra, supporrò invece che l'equazione per φ sia la seguente:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 (\Delta^2 \varphi + \psi),$$

dove ψ è un'altra funzione delle coordinate e del tempo. Per F è da prendersi una funzione arbitraria dall'argomento $t + \frac{r}{a}$; una funzione, quindi, che soddisfa identicamente all'equazione:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r^2}.$$

In tali ipotesi, osservando l'identità:

$$\varphi \frac{\partial \frac{\mathrm{F}}{r}}{\partial n} = \mathrm{F}\left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{ar}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n} \right) + \frac{1}{ar}\frac{\partial (\mathrm{F}\varphi)}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n},$$

si può mettere l'equazione (1) sotto la forma:

$$(\sigma)_0 \mathrm{F}_0 \varphi_0 = \int \mathrm{F}\left(t + \frac{r}{a}\right) \mathrm{G}(t)\, d\sigma + \int \mathrm{F}\left(t + \frac{r}{a}\right) \psi(t) \frac{d\mathrm{S}}{r} + \frac{d\mathrm{H}}{dt},$$

dove per brevità si è posto:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{a}\int \mathrm{F}\varphi \frac{\partial r}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} + \frac{1}{a^2}\int \left(\varphi \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} - \mathrm{F}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \frac{d\mathrm{S}}{r},$$

$$\mathrm{G}(t) = \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{ar}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Quest'ultima espressione, che dipende dal tempo t, dalle coordinate dei punti di σ e dai coseni della normale n, è stata designata col simbolo $G(t)$ perchè è sul parametro t che importa ora fissare l'attenzione: per la stessa ragione si è designata con $\psi(t)$ la funzione ψ che in generale dipende anche dalle coordinate dei punti di S.

« Sieno t_0 e $t_1 > t_0$ due valori di t tali che si abbia costantemente:

$$(2)_a \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) = 0 & \text{per } t \leqq t_0 \\ F(t) = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{per } t \geqq t_1 . \end{cases}$$

Poichè le due funzioni φ ed F sono, per ipotesi, continue insieme colle loro derivate prime nell'intervallo $t_0 \ldots t_1$, si ha

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dH}{dt}\, dt = 0$$

e quindi:

$$(\sigma)_0 \int_{t_0}^{t_1} F(t)\, \varphi_0\, dt = \int d\sigma \int_{t_0}^{t_1} F\left(t + \frac{r}{a}\right) G(t)\, dt + \int \frac{dS}{r} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t + \frac{r}{a}\right) \psi(t)\, dt,$$

ossia, in virtù di $(2)_a$,

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t) \left\{ (\sigma)_0 \varphi_0 - \int G\left(t - \frac{r}{a}\right) d\sigma - \int \psi\left(t - \frac{r}{a}\right) \frac{dS}{r} \right\} dt = 0.$$

Stante l'indeterminazione del fattore $F(t)$, quest'equazione non può sussistere se non è (in tutto l'intervallo $t_0 \ldots t_1$, del resto arbitrario):

$$(2)_b \qquad (\sigma)_0\, \varphi_0 = \int G\left(t - \frac{r}{a}\right) d\sigma + \int \psi\left(t - \frac{r}{a}\right) \frac{dS}{r} ;$$

giacchè se la differenza fra i due membri di quest'ultima equazione non fosse costantemente nulla, si renderebbe assurda l'equazione antecedente prendendo per $F(t)$ una funzione di segno eguale a quello di tale differenza, in ogni intervallo in cui questa non fosse nulla.

« L'equazione $(2)_b$ somministra, quando $\psi = 0$, la rappresentazione analitica assegnata da Kirchhoff al principio di Huygens.

« Per rendere più esplicita questa rappresentazione, si denotino d'ora innanzi con x, y, z le coordinate del polo e con ξ, η, ζ quelle d'un punto qualunque di S o di σ: si designino inoltre con $\varphi(t)$, $\varphi_n(t)$ i valori che le funzioni

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta, t), \quad \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial n}$$

prendono nei punti di σ. Dall'espressione data più sopra di $G(t)$ si ricava, con tali segnature:

$$G\left(t-\frac{r}{a}\right)=\frac{\partial}{\partial n}\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{\varphi_n\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r},$$

dove l'indicata derivazione normale non è operativa che sul raggio vettore r; e l'equazione $(2)_b$ prende la forma:

$$(3)\quad (\sigma)\varphi(x,y,z,t)=\int\left\{\frac{\partial}{\partial n}\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{\varphi_n\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right\}d\sigma+\int\psi\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r},$$

mettendo così in evidenza, quando $\psi=0$, la proprietà che ha la funzione φ, da essa definita per tutti i punti interni a σ (cioè per $(\sigma)=4\pi$), di soddisfare all'equazione differenziale dei moti vibratorii liberi (giacchè le due funzioni di x, y, z e t:

$$\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r},\quad \frac{\varphi_n\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}$$

soddisfanno già di per sè stesse a tale equazione). Del resto l'equazione (3) sussiste anche per uno spazio S che si estenda in tutto od in parte all'infinito, qualora alla funzione φ si attribuiscano le ordinarie proprietà all'infinito d'una funzione potenziale; in questo caso, infatti, resta priva d'influenza quella parte di superficie σ che giace a distanza infinita.

« Il carattere analitico dell'equazione completa (3) si rende pienamente manifesto quando si consideri φ come una funzione totalmente arbitraria e ψ come il simbolo rappresentativo (2) dell'espressione

$$-\Delta_2\varphi+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Ponendo infatti $a=\infty$, si ottiene da (3), sopprimendo l'argomento t (il quale allora non entra più se non a titolo di parametro costante).

$$(\sigma)\varphi(x,y,z)=\int\left(\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma-\int\Delta_2\varphi\frac{dS}{r};$$

si ottiene, cioè, l'ordinaria equazione di Green (già inclusa in (1) per F=1).

« Ma per far meglio rilevare il significato del termine complementare in ψ, conviene premettere un teorema.

« Si consideri un'espressione della forma:

$$U(x,y,z)=\int f(\xi,\eta,\zeta,r)\,dS,$$

dove S è uno spazio qualunque (non avente alcuna relazione necessaria con quello già così designato dianzi) e dove r designa la distanza del punto qualunque (ξ, η, ζ), ove è collocato l'elemento dS, dal polo (x, y, z). Osservando essere

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi},$$

si può scrivere:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\, dS = -\int \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi}\, dS = \int \frac{\partial f}{\partial \xi}\, dS - \int \frac{df}{d\xi}\, dS$$

e quindi, coll'applicazione d'una ben nota trasformazione, si ottiene:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int \frac{\partial f}{\partial \xi}\, dS + \int f \frac{\partial \xi}{\partial n}\, d\sigma,$$

dove σ è la superficie che limita lo spazio S. Derivando nuovamente rispetto ad x ed osservando le eguaglianze:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{\partial \xi}{\partial r},$$

si trova:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\int \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{\partial \xi}{\partial r}\, dS - \int \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n}\, d\sigma.$$

Da questa e dalle due analoghe formole, con riguardo all'eguaglianza:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{\partial \xi}{\partial r} + \text{ecc.},$$

si deduce

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\, dS - \int \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) dS - \int \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}\, d\sigma,$$

equazione alla quale, per essere

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r},$$

si può dare la forma:

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}\frac{dS}{r} - \int \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{dS}{r^2} + \int r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma.$$

In virtù del già invocato teorema di Gauss si ha dunque:

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}\frac{dS}{r} + (\sigma)\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{r=0},$$

risultato il quale assume una forma molto più significativa se si pone:

$$rf(\xi, \eta, \zeta, r) = K(\xi, \eta, \zeta, r),$$

dove K è una funzione dei quattro argomenti ξ, η, ζ, r (che deve supporsi, colla sua derivata prima rispetto ad r, monodroma, continua, finita e derivabile). Si ottiene infatti:

$$U = \int K(\xi, \eta, \zeta, r)\frac{dS}{r}$$

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 K}{\partial r^2}\frac{dS}{r} - (\sigma)\, K(x, y, z, 0),$$

cosicchè la quantità U si presenta ora sotto la forma d'una funzione potenziale molto più generale della newtoniana, mentre la seconda equazione porge, per tale funzione, un teorema analogo a quello di Laplace-Poisson [1].

« Suppongasi ora che la quantità qui designata con K provenga da una funzione $k(\xi, \eta, \zeta, t)$ delle quattro variabili ξ, η, ζ, t col sostituire il binomio $t - \frac{r}{a}$ al posto di t. In tal caso la detta quantità K soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 K}{\partial r^2},$$

cosicchè si può scrivere:

$$\Delta_2 U = \frac{1}{a^2}\int \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\frac{dS}{r} - (\sigma)\, k(x, y, z, t),$$

ossia

$$\Delta_2 U = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - (\sigma)\, k(x, y, z, t).$$

Ne risulta che la funzione U di x, y, z e t, definita dall'espressione:

$$U = \int k\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r}, \tag{4}$$

soddisfa in tutto le spazio all'equazione:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left\{ \Delta_2 U + (\sigma)\, k(x, y, z, t)\right\},$$

o meglio all'equazione:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left\{ \Delta_2 U + 4\pi k(x, y, z, t)\right\}, \tag{4_a}$$

dove alla funzione k s'intende attribuito il valor *zero* in ogni punto esterno allo spazio S.

[1] Cfr. la mia Memoria *Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore* (R. Accademia di Bologna, 1887), ove questo teorema è stabilito, con altro procedimento, in una forma meno generale. Cfr. anche, per le successive formole (4), $(4)_\alpha$, la *Theory of Sound* di Lord Rayleigh, t. II, p. 92.

« Quest' equazione coincide colla (2) quando si ponga:

$$U = \varphi, \qquad k = \frac{\psi}{4\pi}$$

e tale coincidenza spiega la presenza del termine complementare

$$\int \psi\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r}$$

nell'equazione (3). A quel modo che (nell'interpretazione ottica) i primi due termini del secondo membro di quest'equazione corrispondono, come nota Kirchhoff, a sorgenti luminose distribuite in *due* dimensioni (formando strato semplice o doppio), così il termine complementare corrisponde a sorgenti luminose distribuite in *tre* dimensioni. Questo termine manca quando, entro lo spazio S considerato nel teorema (3), manca quest'ultima distribuzione.

« Qui sorge però una questione.

« Quando nell'equazione (2) la funzione ψ non è costantemente nulla, quell'equazione non definisce più oscillazioni *libere*: quale è dunque la forza perturbatrice cui quella funzione corrisponde?

« Non si può risolvere questa questione se non si precisa il significato della funzione φ, la quale può rappresentare uno spostamento, una dilatazione, una rotazione od un potenziale di spostamento. Ammettendo che si tratti di quest'ultimo significato, si denotino, come di solito, con u, v, w le componenti di spostamento e si ponga:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}, \\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}, \\ w &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

Designando con Ω ed ω le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali, l'equazione (2) si traduce, rispetto alle quattro funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, nelle seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= \Omega\,(\Delta_2\varphi + \psi), \\ \frac{\partial_2\varphi_i}{\partial t^2} &= \omega^2\,(\Delta_2\varphi_i + \psi_i), \qquad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Da queste si deduce:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t^2}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right) \\ &= -\Omega^2\left(\frac{\partial\Delta_2\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \omega^2\left\{\Delta_2\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right\}, \end{aligned}$$

ossia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Omega^2\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \omega^2\left(\Delta_2 u - \frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right),$$

dove $\vartheta\,(=-\Delta_2\varphi)$ è la dilatazione cubica. Ma denotando con X, Y, Z le componenti della forza esterna, le equazioni del moto oscillatorio in un mezzo isotropo sono:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\omega^2\Delta_2 u+\mathrm{X},\ \text{ecc.};$$

dunque le cercate forze sono date da:

$$\mathrm{X}=-\Omega^2\frac{\partial\psi}{\partial x}+\omega^2\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right),$$
$$\mathrm{Y}=-\Omega^2\frac{\partial\psi}{\partial y}+\omega^2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right),$$
$$\mathrm{Z}=-\Omega^2\frac{\partial\psi}{\partial z}+\omega^2\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right),$$

ossia si compongono d'una forza retta dalla funzione potenziale $\Omega^2\psi$ e d'una forza retta dalla terna potenziale $(\omega^2\psi_1,\ \omega^2\psi_2,\ \omega^2\psi_3)$.

« Quando si tratta di oscillazioni trasversali, non è dunque che una forza elettromagnetica variabile che può intervenire come causa perturbatrice; e, denotando con

$$\Psi_i\,(x,y,z,t)\qquad\qquad i=1,2,3,$$

la relativa terna potenziale, si soddisfa alle equazioni indefinite del moto perturbato ponendo:

$$\varphi_i=\frac{1}{4\pi\omega^2}\int\Psi_i\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)\frac{d\mathrm{S}}{r},\qquad i=1,2,3,$$

dove gli integrali si estendono a tutto lo spazio.

« Se alle tre funzioni φ_1, φ_2, φ_3 si attribuisse invece (nelle equazioni (2)) il significato di componenti di spostamento, si troverebbe, in modo analogo, che le componenti di forza esterna X, Y, Z coincidono coi prodotti $\omega^2\psi_1$, $\omega^2\psi_2$, $\omega^2\psi_3$ (ciò che del resto s'accorda col risultato precedente).

« Se, finalmente, alle dette funzioni si attribuisce il significato di componenti di rotazione, se si pone cioè:

$$\varphi_1=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\ \text{ecc.},$$

si ricava subito dal confronto colle note equazioni dinamiche che sussistono per queste componenti:

$$\frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial y}-\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial z}=2\omega^2\psi_1,\quad\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial x}=2\omega^2\psi_2,\quad\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial x}-\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial y}=2\omega^2\psi_3$$

e poichè, se X, Y, Z sono componenti di forza elettromagnetica, si sa essere:

$$\frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial y}-\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial z}=4\pi j_1,\quad\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial x}=4\pi j_2,\quad\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial x}-\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial y}=4\pi j_3,$$

dove j_1, j_2, j_3 sono le componenti d'intensità specifica del sistema di correnti donde emana quella forza (sistema supposto in tre dimensioni), si conclude:

$$\psi_1 = \frac{2j_1}{\omega^2}, \quad \psi_2 = \frac{2j_2}{\omega^2}, \quad \psi_3 = \frac{2j_3}{\omega^2}.$$

In queste ipotesi si soddisfa dunque alle equazioni indefinite del moto oscillatorio ponendo:

$$\varphi_i = \frac{1}{2\pi\omega^2}\int j_i\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

dove gli integrali si estendono a tutto lo spazio occupato dalle correnti. Prescindendo da quel qualunque moto oscillatorio libero che può coesistere col moto dovuto alla perturbazione, una perturbazione cosiffatta non si propaga se non da correnti *variabili*.

« È interessante il confronto delle precedenti espressioni delle componenti di rotazione φ_i con quelle che rappresentano le funzioni costituenti la correlativa terna potenziale elettromagnetica, cioè colle:

$$\Psi_i = \int j_i(\xi, \eta, \zeta, t)\frac{dS}{r}, \qquad i = 1, 2, 3 ».$$

Chimica. — *Sulla costituzione delle Cotoine*. Nota del Corrispondente G. Ciamician e di P. Silber.

« *Cotoine* possono chiamarsi in via provvisoria le sostanze contenute nelle corteccie di *Coto*; diciamo provvisoriamente, perchè prima di fare delle proposte definitive intorno alla nomenclatura razionale di questi corpi è necessario aspettare la fine degli studi che presentemente ci occupano, sebbene alcuni dei nomi attuali inventati da Jobst e Hesse, debbano già ora essere abbandonati.

« Le corteccie di *Coto* sono di due specie. Dalla vera corteccia di *Coto* Jobst e Hesse estrassero la *Cotoina* $C_{22}H_{18}O_6$ e la *Dicotoina* $C_{44}H_{34}O_{11}$, di cui non ci siamo ancora occupati; la cosidetta corteccia *Paracoto* contiene invece, secondo i citati autori, un numero molto più ragguardevole di corpi, ai quali è da aggiungersi anche la *Protocotoina* da noi rinvenuta l'anno scorso nell'*Idrocotoina* del commercio. Facendo astrazione degli oli essenziali, che non hanno importanza pei nostri studi, le materie contenute nelle corteccie *Paracoto* possono essere distinte in due gruppi, differenti per il comportamento con gli alcali.

« Solubili nella potassa sono:

la *Paracotoina* $C_{19}H_{12}O_6$,
la *Protocotoina* $C_{16}H_{14}O_6$ e
l'*Idrocotoina* $C_{15}H_{14}O_4$.