ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

« Esperienze dimostrative fatte coll'elettroscopio, mi hanno dato risultati affatto paralleli a quelli esposti. Se, infatti, la sonda comunica colla foglia d'oro d'un elettroscopio a pile secche, e se l'anodo (parete del pallone) comunica col suolo, la deviazione (negativa) della foglia d'oro cresce fino ad un massimo, allorchè la sonda viene allontanata dal catodo. Se invece è questo che comunica col suolo, la deviazione (positiva) cresce gradatamente. Stante il non mai assoluto isolamento, la spiegazione precedente si applica anche alle esperienze fatte coll'elettroscopio.

« Nella Memoria completa che pubblicherò tra qualche tempo, darò i particolari delle esperienze, e farò un confronto fra i miei risultati e quelli anteriori di Warren de la Rue e Müller, di Schuster e di Crookes ».

Matematica. — *Sulle espressioni analitiche generali dei movimenti oscillatori.* Nota di Carlo Somigliana, presentata dal Socio Beltrami.

« § 1. Nella *Mathematische Optik* di Kirchhoff, pubblicata l'anno scorso per cura del sig. dott. K. Hensel, è richiamato (1), senza riportarne la dimostrazione, un teorema di Clebsch relativo alla decomposizione di qualsiasi movimento oscillatorio di un mezzo isotropo in due movimenti, l'uno longitudinale, l'altro trasversale (2). Anche nelle più recenti *Vorlesungen über die Theorie des Lichtes* di Volkmann il lettore, per la stessa questione, è rimandato alla dimostrazione di Clebsch. Ora il procedimento seguito dall'illustre geometra per dimostrare il teorema in discorso non è molto semplice, ed inoltre richiede, a mio credere, qualche altra considerazione che lo completi.

« Perciò non sarà forse priva di interesse, almeno per la sua semplicità, la dimostrazione che segue.

« Supposto che non esistano forze di massa, le equazioni del movimento sono:

$$
1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial \theta}{\partial x} + a^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial \theta}{\partial y} + a^2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial \theta}{\partial z} + a^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

(1) *Erste Vorlesung*, § 3.

(2) Clebsch, *Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche*, Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXI.

dove u, v, w rappresentano le componenti di spostamento, t il tempo, x, y, z coordinate rettangolari, ed inoltre

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\,;$$

a, b infine sono le velocità di propagazione delle onde piane trasversali e longitudinali.

« Dalle equazioni (1) segue immediatamente, come è noto,

$$\begin{gathered}(\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\,\theta = 0\\ (\mathrm{D}_t^2 - a^2 \Delta_2)\,\xi = 0\,,\ (\mathrm{D}_t^2 - a^2 \Delta_2)\,\eta = 0\,,\ (\mathrm{D}_t^2 - a^2 \Delta_2)\,\zeta = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

« Supponiamo *dapprima* che in un tempo t_0 siano nulli in tutto lo spazio gli spostamenti e le velocità, cioè si abbia

$$u = v = w = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{per } t = t_0. \tag{3}$$

« Se noi poniamo

$$\begin{gathered}\mathrm{P} = b^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\,\theta\\ \mathrm{U} = a^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\,\xi\,,\ \mathrm{V} = a^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\,\eta\,,\ \mathrm{W} = a^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\,\zeta\end{gathered} \tag{4}$$

è chiaro che, integrando l'equazione (1) due volte rispetto al tempo fra t_0 e t, si trova

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\\ v &= \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\\ w &= \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\end{aligned} \tag{5}$$

« Ora a cagione delle condizioni (3), e della *regolarità* che noi ammettiamo per le funzioni u, v, w e le loro derivate, almeno in tutto il campo, in cui fa d'uopo di considerarle, si ha

$$\theta = \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \qquad \xi = \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

e perciò

$$(\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\,\mathrm{P} = b^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\,(\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\,\theta$$

$$(\mathrm{D}_t^2 - a^2 \Delta_2)\,\mathrm{U} = a^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\,(\mathrm{D}_t^2 - a^2 \Delta_2)\,\xi$$

ed altre due equazioni analoghe per V, W. A cagione delle (2) avremo dunque:

$$(D_t^2 - b^2 \Delta_2)\, P = 0$$

$$(D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, U = 0\,, \qquad (D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, V = 0\,, \qquad (D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, W = 0.$$

D'altra parte tutte la volte che queste equazioni sono soddisfatte, le (5) danno degli integrali delle equazioni (1); perciò, ammesse le condizioni (3), abbiamo il teorema di Clebsch:

« Le soluzioni più generali delle equazioni (1) sono date dalle espressioni (5), dove P è una soluzione dell'equazione:

$$(D_t^2 - b^2 \Delta_2)\, P = 0$$

ed U, V, W sono soluzioni dell'equazione:

$$(D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, \varphi = 0\,.$$

« Non è difficile ora liberarci dalla restrizione portata dalle (3). Supponiamo infatti che queste condizioni non siano più soddisfatte; ed indichiamo con φ_0, $\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}$ i valori, per $t = t_0$, di una funzione qualunque φ e della sua derivata rispetto al tempo; inoltre poniamo

$$\varphi_0{}^\star = \varphi_0 + (t - t_0)\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\,.$$

« È chiaro che integrando due volte fra t_0 e t le equazioni (1), invece di ottenere le (5), avremo

$$
\begin{aligned}
u - u_0{}^\star &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \\
v - v_0{}^\star &= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (6) \\
w - w_0{}^\star &= \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}
\end{aligned}
$$

dove P, U, V, W sono ancora le stesse funzioni definite dalle (4). Per trovare le equazioni a cui ora soddisfanno queste funzioni, osserviamo che si ha

$$D_t^2\, P = b^2\, \theta = b^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\, D_t^2\, \theta + b^2\, \theta_0{}^\star$$

$$D_t^2\, U = a^2\, \xi = a^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\, D_t^2\, \xi + a^2\, \xi_0{}^\star$$

quindi, per le (2),

$$(7) \qquad (D_t^2 - b^2 \Delta_2)\, P = b^2\, \theta_0{}^\star \qquad (D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, U = a^2\, \xi_0$$

ed altre due equazioni analoghe per V, W.

« Ora è noto che una terna di funzioni di x, y, z come u_0, v_0, W_0, oppure le loro derivate rispetto al tempo, può sempre essere rappresentata con espressioni analoghe ai secondi membri delle (5), colla condizione inoltre

$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$ per la terna U, V, W [1]. Noi potremo quindi porre:

$$
8)\qquad
\begin{aligned}
u_0^{\star} &= \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial z} - \frac{\partial W'}{\partial y} \\
v_0^{\star} &= \frac{\partial P'}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial x} - \frac{\partial U'}{\partial z} \\
w_0^{\star} &= \frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{\partial U'}{\partial y} - \frac{\partial V'}{\partial x}
\end{aligned}
$$

colla condizione

$$\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial z} = 0 ,$$

e le funzioni P′, U′, V′, W′, al pari dei primi membri, saranno *funzioni lineari* del tempo.

« Se ora poniamo:

$$\overline{P} = P + P'$$

$$\overline{U} = U + U' \qquad \overline{V} = V + V' \qquad \overline{W} = W + W'$$

le (6) divengono:

$$
9)\qquad
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \\
v &= \frac{\partial \overline{P}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \\
w &= \frac{\partial \overline{P}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{V}}{\partial x}
\end{aligned}
$$

e dalle (8) si ha:

$$(D_t^2 - b^2 \Delta_2)\, P' = - b^2 \theta_0^{\star} \qquad (D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, U' = - a^2 \xi_0^{\star}$$

ed altre due equazioni analoghe per V′, W′; per cui, sommando colle (7), troviamo:

$$
10)\qquad
\begin{gathered}
(D_t^2 - b^2 \Delta_2)\, \overline{P} = 0 \\
(D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, \overline{U} = 0 \quad (D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, \overline{V} = 0 \quad (D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, \overline{W} = 0.
\end{gathered}
$$

« Il teorema di Clebsch resta così dimostrato senza alcuna restrizione.

« Le funzioni $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$, essendo:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 ,$$

soddisfanno anche alla relazione:

$$10')\qquad \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 0 ;$$

[1] Una dimostrazione generale di questo teorema si può vedere in: Lipschitz, *Beitrag zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen*, Borchardt's Journal, Bd. LXIX; e del resto è facile rendersene ragione con considerazioni assai semplici. V. ad es. Picard, *Traité d'analyse*, T. I, pag. 177 Paris. 1891.

e quindi dalle (9) si ricava:

$$\Delta_2 \overline{\mathrm{P}} = \theta$$

10'')

$$\Delta_2 \overline{\mathrm{U}} = \xi \qquad \Delta_2 \overline{\mathrm{V}} = \eta \qquad \Delta_2 \overline{\mathrm{W}} = \zeta\,.$$

« Si può ora domandare se la determinazione delle funzioni $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{U}}$, $\overline{\mathrm{V}}$, $\overline{\mathrm{W}}$ si possa fare in un sol modo, o se vi sia in esse qualche cosa di arbitrario. Se indichiamo con f, l, m, n le differenze fra le funzioni di due quaderne, per le quali sussistano le formole (9), (10), (10'), è chiaro che dovremo avere:

11)

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z} = 0\end{gathered}$$

da cui segue:

$$\Delta_2 f = \Delta_2 l = \Delta_2 m = \Delta_2 n = 0\,,$$

e quindi dalle (10) abbiamo:

11')

$$\mathrm{D}_t^2 f = \mathrm{D}_t^2 l = \mathrm{D}_t^2 m = \mathrm{D}_t^2 n = 0.$$

« Reciprocamente possiamo sempre aggiungere rispettivamente a $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{U}}$, $\overline{\mathrm{V}}$, $\overline{\mathrm{W}}$ quattro funzioni f, l, m, n, le quali soddisfacciano le (11), (11') senza che cessi la validità delle (9), (10), (10'). Possiamo quindi dire: l e f u n z i o n i $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{U}}$, $\overline{\mathrm{V}}$, $\overline{\mathrm{W}}$ s o n o d e t e r m i n a t e a l l' i n f u o r i d i q u a t t r o f u n z i o n i l i n e a r i d e l t e m p o , c h e s i a n o s o l u z i o n i d e l l e e q u a z i o n i (11).

« § 2. Oltre le (9), si conoscono altre espressioni per gli integrali delle equazioni dei movimenti oscillatori nei mezzi isotropi; non sarà perciò inopportuno cercare quali relazioni abbiano colle (9) queste altre espressioni, e dimostrarne parimenti la *generalità* col procedimento già seguito.

« Poniamo:

$$\varphi_1 = b^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \frac{\partial \overline{\mathrm{P}}}{\partial x} \qquad \varphi_2 = -a^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{V}}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{\mathrm{W}}}{\partial y} \right)$$

$$\psi_1 = b^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \frac{\partial \overline{\mathrm{P}}}{\partial y} \qquad \psi_2 = -a^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{W}}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\mathrm{U}}}{\partial z} \right)$$

$$\chi_1 = b^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \frac{\partial \overline{\mathrm{P}}}{\partial z} \qquad \chi_2 = -a^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{U}}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{\mathrm{V}}}{\partial x} \right)$$

ed inoltre:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \qquad \psi = \psi_1 + \psi_2 \qquad \chi = \chi_1 + \chi_2.$$

Avuto riguardo alle (10″), avremo:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \psi_1}{\partial y}+\frac{\partial \chi_1}{\partial z}=\mathrm{P}=\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{P}', \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial \psi_2}{\partial y}+\frac{\partial \chi_2}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z}-\frac{\partial \chi_1}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial z}-\frac{\partial \chi_2}{\partial y}=\mathrm{U}=\overline{\mathrm{U}}-\mathrm{U}'$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x}-\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial \chi_2}{\partial x}-\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}=\mathrm{V}=\overline{\mathrm{V}}-\mathrm{V}'$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial \psi_1}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}-\frac{\partial \psi_2}{\partial x}=\mathrm{W}=\overline{\mathrm{W}}-\mathrm{W}'.$$

« Quindi, sostituendo nelle (9) le espressioni di $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{U}}$, $\overline{\mathrm{V}}$, $\overline{\mathrm{W}}$ che risultano da queste formole, si ha:

12) $$u-u_0^{\star}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)-\Delta_2\varphi_2$$

ed altre due equazioni analoghe.

« Ora osservando che si ha:

$$\mathrm{D}_t^2\varphi_1=b^2\frac{\partial \overline{\mathrm{P}}}{\partial x} \qquad \mathrm{D}_t^2\varphi_2=-a^2\left(\frac{\partial \overline{\mathrm{V}}}{\partial z}-\frac{\partial \overline{\mathrm{W}}}{\partial y}\right)$$

si trova subito:

13) $$\begin{aligned}(\mathrm{D}_t^2-b^2\Delta_2)\varphi_1&=b^2\frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial x}\\ (\mathrm{D}_t^2-a^2\Delta_2)\varphi_2&=-a^2\left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial y}\right),\end{aligned}$$

e quindi aggiungendo membro a membro queste due uguaglianze alla (12), dopo aver moltiplicato questa per b^2-a^2, e le (13) per -1, si trova:

14) $$\begin{aligned}&(b^2-a^2)(u-u_0^{\star})+b^2\frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial x}-a^2\left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial y}\right)=\\ &=(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)-\\ &-(b^2-a^2)\Delta_2\varphi_2+(\mathrm{D}_t^2-b^2\Delta_2)\varphi_1+(\mathrm{D}_t^2-a^2\Delta_2)\varphi_2=\\ &=(\mathrm{D}_t^2-b^2\Delta_2)\varphi+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \chi}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Ora si ha:

$$(b^2-a^2)u_0^{\star}-b^2\frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial x}+a^2\left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial y}\right)=-a^2\frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial x}+b^2\left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial y}\right)$$

e pel teorema già invocato al § 1 noi potremo sempre determinare tre funzioni φ', ψ', χ' per le quali si abbia:

$$\mathrm{P}' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} + \frac{\partial \chi'}{\partial z}$$

$$\mathrm{U}' = \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \chi'}{\partial y}$$

15)

$$\mathrm{V}' = \frac{\partial \chi'}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'}{\partial z}$$

$$\mathrm{W}' = \frac{\partial \varphi'}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial x},$$

e che risulteranno funzioni lineari del tempo. Avremo allora:

$$-a^2 \frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial x} + b^2 \left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial y} \right) = (\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\, \varphi' + $$
$$+ (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} + \frac{\partial \chi'}{\partial z} \right).$$

« Sostituendo nella (14) e nelle due analoghe che si possono formare e ponendo inoltre:

$$\overline{\varphi} = \frac{\varphi + \varphi'}{b^2 - a^2} \qquad \overline{\psi} = \frac{\psi + \psi'}{b^2 - a^2} \qquad \overline{\chi} = \frac{\chi + \chi'}{b^2 - a^2},$$

troviamo:

16)
$$u = (\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\, \overline{\varphi} + (b^2 - a^2)\, \mathrm{D}_x\, \Omega$$
$$v = (\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\, \overline{\psi} + (b^2 - a^2)\, \mathrm{D}_y\, \Omega$$
$$w = (\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\, \overline{\chi} + (b^2 - a^2)\, \mathrm{D}_z\, \Omega$$

dove si è posto:

$$\Omega = \mathrm{D}_x\, \overline{\varphi} + \mathrm{D}_y\, \overline{\psi} + \mathrm{D}_z\, \overline{\chi}.$$

« Cerchiamo ora le equazioni, a cui soddisfanno $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, $\overline{\chi}$. Dalle (13) noi ricaviamo immediatamente:

$$(\mathrm{D}_t^2 - a^2 \Delta_2)(\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\, \varphi_1 = -a^2 b^2 \frac{\partial \Delta_2 \mathrm{P}'}{\partial x} = -a^2 b^2 \frac{\partial \theta_0^\star}{\partial x}$$

$$(\mathrm{D}_t^2 - a^2 \Delta_2)(\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\, \varphi_2 = \quad a^2 b^2 \left(\frac{\partial \eta_0^\star}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_0^\star}{\partial y} \right)$$

e quindi sommando:

17) $$(\mathrm{D}_t^2 - a^2 \Delta_2)(\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\, \varphi = -a^2 b^2 \left(\frac{\partial \theta_0^\star}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_0^\star}{\partial y} - \frac{\partial \eta_0^\star}{\partial z} \right).$$

« Ora dalle (15) si ricava inoltre:

$$\Delta_2\, \varphi' = \frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial z}$$

e quindi:

17′) $$(\mathrm{D}_t^2 - a^2 \Delta_2)(\mathrm{D}_t^2 - b^2 \Delta_2)\varphi' = a^2 b^2 \Delta_2 \Delta_2 \varphi = a^2 b^2 \left(\frac{\partial \theta_0^\star}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_0^\star}{\partial y} - \frac{\partial \eta_0^\star}{\partial z} \right).$$

Sommando le (17) (17′) troviamo che la funzione $\overline{\varphi}$ è un integrale dell'equazione:

$$(D_t^2 - a^2 \Delta_2)(D_t^2 - b^2 \Delta_2) f = 0 \,, \tag{18}$$

a cui naturalmente soddisfanno anche le $\overline{\psi}$, $\overline{\chi}$. D'altra parte le formole (16) danno sempre delle soluzioni delle equazioni del movimento, purchè le $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, $\overline{\chi}$ siano soluzioni della (18); vediamo quindi che le (16) forniscono una rappresentazione generale delle soluzioni delle equazioni (1).

Di questa soluzione si è servito Cauchy per ottenere gli integrali generali delle equazioni del movimento, quando sono dati i valori iniziali degli spostamenti e delle velocità. Alla forma (16) degli integrali porta appunto il procedimento generale di Cauchy per la formazione degli integrali di un sistema qualsiasi di equazioni lineari, omogenee, a coefficienti costanti mediante integrali della così detta *equazione caratteristica*, rappresentata nel nostro caso dalla (18) (1).

Delle (16) si vale pure Weierstrass, in alcune considerazioni pubblicate dalla Kowalevski (2), per stabilire un metodo generale d'integrazione delle equazioni del movimento.

§ 3. Il procedimento, che ci ha servito nel § 1 per arrivare al teorema di Clebsch, può essere applicato anche ad equazioni più generali delle (1). Se supponiamo che il mezzo oscillante, anzichè essere isotropo, sia il cosidetto mezzo di Green, le equazioni del movimento sono:

$$\tag{19} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + b^2 \dfrac{\partial \eta}{\partial z} - c^2 \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = A^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial y} + c^2 \dfrac{\partial \xi}{\partial x} - a^2 \dfrac{\partial \xi}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial z} + a^2 \dfrac{\partial \xi}{\partial y} - b^2 \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases}$$

ove A, a, b, c sono costanti. Le θ, ξ, η, ζ soddisfanno in questo caso alle equazioni:

$$(D_t^2 - A^2 \Delta_2)\,\theta = 0$$

$$(D_t^2 - a^2 \Delta_2)\,\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \,, \quad (D_t^2 - b^2 \Delta_2)\,\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \,, \quad (D_t^2 - c^2 \Delta_2)\,\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

ove si è posto:

$$\Phi = a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

(1) Vedi particolarmente: Cauchy, *Mémoire sur la transformation et la réduction des intégrales générales d'un sistème d'équations linéaires aux différences partielles*, § 5. Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. I. Paris 1840.

(2) Kowalevski, *Ueber die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln*, Acta mathematica, VI, pg. 249. 1885.

ed il teorema analogo a quello di Clebsch, ma più generale, a cui si arriva in questo caso, è il seguente:

« Le soluzioni più generali delle equazioni (19) sono date dalle espressioni:

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}$$

dove P è una soluzione dell'equazione:

$$(D_t^2 - A^2 \Delta_2)\, P = 0$$

ed U, V, W sono soluzioni del sistema di equazioni:

$$(D_t^2 - a^2 \Delta_2) U + \frac{\partial S}{\partial x} = 0\,,\ (D_t^2 - b^2 \Delta_2) U + \frac{\partial S}{\partial y} = 0\,,\ (D_t^2 - c^2 \Delta_2) W + \frac{\partial S}{\partial z} = 0$$

ove si è posto:

$$S = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

« È assai facile vedere quale è in questo caso la determinazione delle P, U, V, W analoga a quella delle $\overline{P}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ del § 1.

« La decomponibilità di qualsiasi movimento oscillatorio di un mezzo di Green in due, l'uno trasversale e l'altro longitudinale, risulta immediatamente da questo teorema (¹).

« Le equazioni a cui soddisfanno le U, V, W non coincidono in questo caso, come in quello dell'isotropia, con quelle degli spostamenti nel moto trasversale; abbiamo invece due sistemi di equazioni differenti, i quali però hanno la stessa equazione caratteristica, come è facile verificare ».

Fisica. — *Contributo allo studio delle variazioni di resistenza del nichel nel campo magnetico* (²). Nota del dott. Michele Cantone, presentata dal Socio Blaserna.

« In un precedente lavoro ho esposto i risultati di alcune ricerche relative alle *variazioni di resistenza del ferro e del nichel nel campo magnetico;* mi permetto ora di comunicare l'esito di ulteriori studi intrapresi allo scopo d'indagare la natura della legge di dipendenza fra le intensità magnetiche e le variazioni di resistenza.

(¹) Una dimostrazione di tale decomponibilità si può vedere in fine della Memoria precedentemente citata, della Kowalevski.

(²) Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica della R. Università di Palermo.