ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

Matematica. — *Sulla trasformazione di Bäcklund pei sistemi tripli ortogonali pseudosferici.* Nota del Corrispondente LUIGI BIANCHI.

« Come già ho accennato alla fine della Nota precedente [1], il teorema di permutabilità delle trasformazioni di Bäcklund, con tutte le sue conseguenze, vale non solo per le superficie pseudosferiche isolate, ma ben anche per quei sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie pseudosferiche, sia la curvatura di queste superficie una costante assoluta (*sistemi di Weingarten*) ovvero variabile colla superficie. Basterà qui che ci trattemiamo sulla dimostrazione del teorema di permutabilità, riferendoci per la deduzione degli importanti corollarî alla Nota antecedente.

I.

Formole per la trasformazione di Bäcklund.

« Esprimendo le coordinate Cartesiane ortogonali x, y, z di un punto mobile nello spazio in funzione dei parametri u, v, w di un sistema triplo ortogonale pseudosferico, in cui le superficie $w = \text{cost}^{\text{te}}$ siano a curvatura costante $-\dfrac{1}{R^2}$, essendo $R(w)$ funzione di w soltanto, l'elemento lineare dello spazio prende, come è noto, la forma [2].

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \cos^2\omega\, du^2 + \text{sen}^2\omega\, dv^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 dw^2\,. \tag{1}$$

« Secondo i risultati della Nota ora citata, possiamo dedurre da questo sistema Σ, per mezzo della trasformazione di Bäcklund, nuovi sistemi della stessa specie. Indicando perciò con k una costante arbitraria e ponendo

$$\cos\sigma = \frac{k}{R}\,,$$

si determini la funzione ω' di u, v, w dal sistema illimitatamente integrabile

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega'}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\text{sen}\omega' \cos\omega + \text{sen}\sigma \cos\omega' \,\text{sen}\omega}{k}\\
&\frac{\partial\omega'}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial u} = -\frac{\cos\omega' \,\text{sen}\omega + \text{sen}\sigma\,\text{sen}\omega' \cos\omega}{k}\\
&\text{sen}\sigma\frac{\partial\omega'}{\partial w} + \frac{\partial\omega}{\partial w} + k\frac{\cos\omega'}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} + k\frac{\text{sen}\omega'}{\text{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} = 0\,,
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

(1) Questi Rendiconti 3 luglio 1892.

(2) Vedi la mia Nota nei Rendiconti dell'Accademia 3 gennaio 1886.

che ammette una soluzione ω', contenente (oltre k) una costante arbitraria; il sistema derivato Σ' risulterà allora definito dalle formole

$$(3)\qquad \begin{cases} x' = x + k\,(\cos\omega'\,X_1 + \operatorname{sen}\omega'\,X_2) \\ y' = y + k\,(\cos\omega'\,Y_1 + \operatorname{sen}\omega'\,Y_2) \\ z' = z + k\,(\cos\omega'\,Z_1 + \operatorname{sen}\omega'\,Z_2)\,, \end{cases}$$

in cui (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) denotano i coseni di direzione delle rispettive normali alle superficie u, v, w del sistema Σ. Diremo che il sistema Σ' è derivato da Σ per mezzo di una trasformazione di Bäcklund B_k. Indicando coll'accento le quantità che per Σ' sono le analoghe di X_1, X_2, X_3 importa osservare le formole:

$$(4)\qquad \begin{cases} X'_1 = (\cos\omega'\cos\omega - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega'\operatorname{sen}\omega)\,X_1 + (\operatorname{sen}\omega'\cos\omega + \\ \qquad + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega'\operatorname{sen}\omega)\,X_2 + \cos\sigma\operatorname{sen}\omega\,X_3 \\ X'_2 = (\cos\omega'\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega'\cos\omega)\,X_1 + (\operatorname{sen}\omega'\operatorname{sen}\omega - \\ \qquad - \operatorname{sen}\sigma\cos\omega'\cos\omega)\,X_2 - \cos\sigma\cos\omega\,X_3 \\ X'_3 = -\cos\sigma\operatorname{sen}\omega'\,X_1 + \cos\sigma\cos\omega'\,X_2 - \operatorname{sen}\sigma\,X_3 \end{cases}$$

che sussistono colle analoghe in Y, Z. Dalle (3) risulta inoltre

$$(5)\qquad dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \cos^2\omega'\,du^2 + \operatorname{sen}^2\omega'\,dv^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega'}{\partial w}\right)^2 dw^2\,.$$

II.

Teorema di permutabilità.

« Se Σ', Σ'' sono due sistemi tripli ortogonali pseudosferici legati al medesimo sistema Σ da due trasformazioni di Bäcklund B_k, $B_{k'}$ a costanti k, k' diverse, esiste un quarto sistema pseudosferico Σ''' legato rispettivamente a Σ', Σ'' da trasformazioni di Bäcklund $B'_{k'}$, B'_k colle costanti invertite k', k.

« Per dimostrarlo scriviamo le formole del § precedente applicate ai due sistemi derivati Σ', Σ'', ponendo

$$\cos\sigma = \frac{k}{R}\,,\quad \cos\sigma' = \frac{k'}{R}\,;$$

avremo così

$$(6)\qquad \begin{cases} x' = x + R\cos\sigma\ (\cos\omega'\ X_1 + \operatorname{sen}\omega'\ X_2) \\ x'' = x + R\cos\sigma'\,(\cos\omega''\ X_1 + \operatorname{sen}\omega''\ X_2) \end{cases}$$

colle analoghe per y, z, ove tra (ω', ω), (ω'', ω) sussistono le rispettive relazioni:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega'}{\partial u} + \dfrac{\partial\omega}{\partial v} = \dfrac{\operatorname{sen}\omega'\cos\omega + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega'\operatorname{sen}\omega}{R\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\omega'}{\partial v} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u} = -\dfrac{\cos\omega'\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega'\cos\omega}{R\cos\sigma} \\ \operatorname{sen}\sigma\dfrac{\partial\omega'}{\partial w} + \dfrac{\partial\omega}{\partial w} + R\cos\sigma\,\dfrac{\cos\omega'}{\cos\omega}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} + R\cos\sigma\,\dfrac{\operatorname{sen}\omega'}{\operatorname{sen}\omega}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} = 0 \end{cases}$$

$$(8)\begin{cases} \dfrac{\partial\omega''}{\partial u}+\dfrac{\partial\omega}{\partial v}=\dfrac{\operatorname{sen}\omega''\cos\omega+\operatorname{sen}\sigma'\cos\omega''\operatorname{sen}\omega}{\mathrm{R}\cos\sigma'} \\ \dfrac{\partial\omega''}{\partial v}+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}=-\dfrac{\cos\omega''\operatorname{sen}\omega+\operatorname{sen}\sigma'\operatorname{sen}\omega''\cos\omega}{\mathrm{R}\cos\sigma'} \\ \operatorname{sen}\sigma'\dfrac{\partial\omega''}{\partial w}+\dfrac{\partial\omega}{\partial w}+\mathrm{R}\cos\sigma'\dfrac{\cos\omega''}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}+\mathrm{R}\cos\sigma'\dfrac{\operatorname{sen}\omega''}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}=0\,. \end{cases}$$

Se il quarto sistema Σ''' esiste effettivamente, come viene asserito dal teorema, indicando con tre apici le quantità ad esso relative, dovranno insieme sussistere le equazioni

$$\begin{cases} x'''=x'+\mathrm{R}\cos\sigma'\,(\cos\omega'''\,\mathrm{X}'_1+\operatorname{sen}\omega'''\,\mathrm{X}'_2) \\ x'''=x''+\mathrm{R}\cos\sigma\,(\cos\omega'''\,\mathrm{X}''_1+\operatorname{sen}\omega'''\,\mathrm{X}''_2) \end{cases}$$

colle analoghe in y, z. Se in queste per X'_1, X'_2 sostituiamo i valori (4) e per X''_1, X''_2 le espressioni analoghe, dal paragone dei due valori di x''' deduciamo le due equazioni:

$$\begin{cases} \cos\omega'\Big[\cos\sigma+\cos\sigma'\cos(\omega'''-\omega)\Big]+\cos\sigma'\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega'\operatorname{sen}(\omega'''-\omega)= \\ \quad=\cos\omega''\Big[\cos\sigma'+\cos\sigma\cos(\omega'''-\omega)\Big]+\cos\sigma\operatorname{sen}\sigma'\operatorname{sen}\omega''\operatorname{sen}(\omega'''-\omega) \\ \operatorname{sen}\omega'\Big[\cos\sigma+\cos\sigma'\cos(\omega'''-\omega)\Big]-\cos\sigma'\operatorname{sen}\sigma\cos\omega'\operatorname{sen}(\omega'''-\omega)= \\ \quad=\operatorname{sen}\omega''\Big[\cos\sigma'+\cos\sigma\cos(\omega'''-\omega)\Big]-\cos\sigma\operatorname{sen}\sigma'\cos\omega''\operatorname{sen}(\omega'''-\omega) \end{cases}$$

Moltiplicando queste una prima volta rispettivamente per $\cos\omega'$, $\operatorname{sen}\omega'$, una seconda volta per $\cos\omega''$, $\operatorname{sen}\omega''$ ed ogni volta sommando, indi risolvendo rapporto a $\operatorname{sen}(\omega'''-\omega)$, $\cos(\omega'''-\omega)$, otteniamo le due formole della precedente Nota

$$(8)\quad\begin{cases} \operatorname{sen}(\omega'''-\omega)=\dfrac{(\operatorname{sen}\sigma-\operatorname{sen}\sigma')\operatorname{sen}(\omega''-\omega')}{\cos\sigma\cos\sigma'\cos(\omega''-\omega')+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\sigma'-1} \\ \cos(\omega'''-\omega)=\dfrac{\cos\tau\cos\sigma'+(\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\sigma'-1)\cos(\omega''-\omega')}{\cos\sigma\cos\sigma'\cos(\omega''-\omega')+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\sigma'-1}\,, \end{cases}$$

alle quali possiamo nuovamente sostituire l'equazione equivalente

$$(8^*)\qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\omega'''-\omega}{2}\right)=\frac{\cos\left(\dfrac{\sigma+\sigma'}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sigma-\sigma'}{2}\right)}\operatorname{tang}\left(\frac{\omega'-\omega''}{2}\right)\,.$$

Poichè adunque, se il 4° sistema Σ''' esiste, esso è determinato da quest'ultima equazione, resterà soltanto a verificare su questa equazione le proprietà asserite nel teorema [1].

[1] Le equazioni (8) (8*) coincidono perfettamente colle analoghe della Nota precedente. Se osserviamo che quattro superficie pseudosferiche corrispondenti nei quattro sistemi Σ, Σ', Σ'', Σ''' debbono trovarsi appunto nelle relazioni enunciate dal teorema di permutabilità (ibid., § II), vediamo *a priori* la ragione di questo fatto. Partendo da questa osservazione, si potrebbero senz'altro scrivere le (8) (8*).

III.

Verifica.

« Possiamo conseguire lo scopo proposto in due modi diversi, cioè direttamente ovvero appoggiandoci ai risultati della Nota precedente.

« Nel primo modo dobbiamo dimostrare che la funzione ω''' definita dalle (8) (8*) è legata ad ω' dalle equazioni differenziali

$$(\alpha)\begin{cases} \dfrac{\partial\omega'''}{\partial u}+\dfrac{\partial\omega'}{\partial v}=\dfrac{\operatorname{sen}\omega'''\cos\omega'+\operatorname{sen}\sigma'\cos\omega'''\operatorname{sen}\omega'}{\mathrm{R}\cos\sigma'} \\ \dfrac{\partial\omega'''}{\partial v}+\dfrac{\partial\omega'}{\partial u}=-\dfrac{\cos\omega'''\operatorname{sen}\omega'+\operatorname{sen}\sigma'\operatorname{sen}\omega'''\cos\omega'}{\mathrm{R}\cos\sigma'} \\ \operatorname{sen}\sigma'\dfrac{\partial\omega'''}{\partial w}+\dfrac{\partial\omega'}{\partial w}+\mathrm{R}\cos\sigma'\dfrac{\cos\omega'''}{\cos\omega'}\dfrac{\partial^2\omega'}{\partial u\,\partial w}+\mathrm{R}\cos\sigma'\dfrac{\operatorname{sen}\omega'''}{\operatorname{sen}\omega'}\dfrac{\partial^2\omega'}{\partial v\,\partial w}=0 \end{cases}$$

e ad ω'' dalle equazioni analoghe:

$$(\beta)\begin{cases} \dfrac{\partial\omega'''}{\partial u}+\dfrac{\partial\omega''}{\partial v}=\dfrac{\operatorname{sen}\omega'''\cos\omega''+\operatorname{sen}\sigma\cos\omega'''\operatorname{sen}\omega''}{\mathrm{R}\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\omega'''}{\partial v}+\dfrac{\partial\omega''}{\partial u}=-\dfrac{\cos\omega'''\operatorname{sen}\omega''+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega'''\cos\omega''}{\mathrm{R}\cos\sigma} \\ \operatorname{sen}\sigma\dfrac{\partial\omega'''}{\partial w}+\dfrac{\partial\omega''}{\partial w}+\mathrm{R}\cos\sigma\dfrac{\cos\omega'''}{\cos\omega''}\dfrac{\partial^2\omega''}{\partial u\,\partial w}+\mathrm{R}\cos\sigma\dfrac{\operatorname{sen}\omega'''}{\operatorname{sen}\omega''}\dfrac{\partial^2\omega''}{\partial v\,\partial w}=0. \end{cases}$$

« Ora derivando la (8*) successivamente rapporto a u, v, w osservando le (8) (7) (7^A), nonchè le equazioni che seguono da queste ultime per derivazione, si trova facilmente che le (α) (β) sono identicamente verificate.

« In altro modo perveniamo al risultato stesso osservando che, pei teoremi della Nota precedente, la formola (8*) fa corrispondere ad ogni terna di superficie pseudosferiche corrispondenti S, S′, S″ nei sistemi Σ, Σ', Σ'' una quarta superficie pseudosferica S‴ legata rispettivamente a S′, S″ da due trasformazioni di Bäcklund a costanti k', k.

« Per provare poi che la serie di superficie S‴ appartiene ad un sistema triplo ortogonale, osserviamo che se P, P′, P″, P‴ sono quattro punti corrispondenti sopra S, S′, S″, S‴ e a P facciamo descrivere una delle curve C traiettorie ortogonali delle S nel sistema Σ, contemporaneamente P′, P″ descriveranno due curve C′, C″ traiettorie ortogonali delle rispettive serie S′, S″. Indicando con C‴ la curva descritta da P‴, basta ora osservare che i segmenti P′ P‴, P″ P‴ sono costanti e normali a C′, C″ per dedurne che essi sono perpendicolari in P‴ alla curva C‴; ma questi segmenti giacciono nel piano tangente a S‴ in P‴, quindi le curve C‴ sono traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche S‴. Se in fine ricordiamo che la trasformazione di Bäcklund conserva le linee di curvatura, vediamo che le curve C''' uscenti dai punti di una linea di curvatura di una S''' formano una superficie, che taglia tutte le altre superficie della serie di S''' lungo linee di curvatura e in conseguenza le S''' appartengono ad un sistema triplo ortogonale c.d.d.

IV.

Applicazioni.

Precisamente come nella Nota anteriore deduciamo dal teorema di permutabilità l'importante conseguenza:

Se di un sistema pseudosferico Σ conosciamo tutti i sistemi derivati di Bäcklund, per ciascuno di questi ultimi potremo determinare con soli calcoli algebrici e di derivazione tutti i nuovi sistemi derivati.

È inutile trascrivere qui le formole da impiegarsi per questa successiva applicazione dei metodi di trasformazione dei sistemi pseudosferici; esse rimangono le stesse della Nota precedente.

Scegliamo piuttosto un caso effettivo in cui la circostanza supposta nell'ultimo teorema si presenta realmente. Basterebbe per ciò, come nella mia Nota del gennaio 1886, considerare un sistema Σ le cui superficie pseudosferiche siano elicoidi del Dini aventi a comune l'asse e il profilo meridiano (trattrice) e differenti in generale fra loro pel passo, quindi per la curvatura. Limitiamoci qui a considerare il caso più semplice, in cui queste elicoidi siano tutte congruenti per rotazione attorno all'asse (sistema di Weingarten). Il corrispondente valore di ω nella (1) è allora dato dalla equazione

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = e^{\alpha}, \qquad \alpha = \frac{u - v \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} + w \ (\sigma \text{ costante}).$$

Secondo i risultati della Nota precedente (§ VI), una prima applicazione della trasformazione di Bäcklund B_τ conduce alla formula:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{\cos\left(\dfrac{\sigma+\tau}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sigma-\tau}{2}\right)} \frac{e^{\alpha} - e^{\beta}}{1 + e^{\alpha+\beta}}, \quad \beta = \frac{u - v \operatorname{sen}\tau}{\cos\tau} + \mathrm{W},$$

dove W è una funzione di w. Per determinarla ricorriamo alle relazioni (2) che debbono legare ω', ω. Le prime due risultano identiche, mentre l'ultima dà:

$$\frac{d\mathrm{W}}{dw} = \operatorname{tang}\sigma \cot\tau.$$

« La formola

$$\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2}=\frac{\cos\left(\frac{\sigma+\tau}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma-\tau}{2}\right)}\frac{e^{\frac{u-v\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}+w}-e^{\frac{u-v\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}+\operatorname{tang}\sigma\cot\tau w+c}}{1+e^{\frac{u-v\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}+\frac{u-v\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}+(\operatorname{tang}\sigma\cot\tau+1)w+c}}$$

determina adunque tutti i sistemi derivati per trasformazione di Bäcklund dal sistema elicoidale primitivo. L'applicazione successiva ed illimitata del metodo ai nuovi sistemi ora ottenuti richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazione ».

Matematica. — *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* Nota del Corrispondente Vito Volterra.

« 1. Nel 1882 Kirchhoff [1], mediante una ingegnosa applicazione del teorema di Green, ha stabilito una formula, ormai celebre, che comprende in sè il principio di Huyghens, e la cui importanza resulta principalmente dall'applicazione fattane alla teoria della diffrazione.

« È ben noto che il processo tenuto da Kirchhoff ha la sua base nella esistenza dell'integrale di Eulero

$$\frac{f(r+at)}{r}$$

della equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) \tag{1}$$

in cui f è una funzione arbitraria ed

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

« Nel caso delle onde cilindriche, la equazione (1) si riduce all'altra

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \tag{1'}$$

della quale manca un integrale analogo a quello di Eulero, cioè un integrale avente la forma

$$\lambda f(r+at) \tag{2}$$

in cui

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

e λ è una funzione della sola r.

[1] *Zur Theorie der Lichtstrahlen* (Sitzb. d. Berliner Ak. v. Jahre 1882).