

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
ANNO CCLXXXIX.  
1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° SEMESTRE



ROMA  
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

« La formola

$$\operatorname{tang} \frac{\omega'}{2} = \frac{\cos \left( \frac{\sigma + \tau}{2} \right) \frac{u-v \operatorname{sen} \sigma}{e \cos \sigma} + w - e \frac{u-v \operatorname{sen} \tau}{\cos \tau} + \operatorname{tang} \sigma \cot \tau w + c}{\operatorname{sen} \left( \frac{\sigma - \tau}{2} \right) 1 + e \frac{u-v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} + \frac{u-v \operatorname{sen} \tau}{\cos \tau} + (\operatorname{tang} \sigma \cot \tau + 1) w + c}$$

determina adunque tutti i sistemi derivati per trasformazione di Bäcklund dal sistema elicoidale primitivo. L'applicazione successiva ed illimitata del metodo ai nuovi sistemi ora ottenuti richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazione \*.

**Matematica.** — *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.*  
Nota del Corrispondente VITO VOLTERRA.

« 1. Nel 1882 Kirchhoff (1), mediante una ingegnosa applicazione del teorema di Green, ha stabilito una formola, ormai celebre, che comprende in sè il principio di Huyghens, e la cui importanza risulta principalmente dall'applicazione fattane alla teoria della diffrazione.

« È ben noto che il processo tenuto da Kirchhoff ha la sua base nella esistenza dell'integrale di Eulero

$$\frac{f(r+at)}{r}$$

della equazione differenziale

$$(1) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)$$

in cui  $f$  è una funzione arbitraria ed

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

« Nel caso delle onde cilindriche, la equazione (1) si riduce all'altra

$$(1') \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

della quale manca un integrale analogo a quello di Eulero, cioè un integrale avente la forma

$$(2) \quad \lambda f(r+at)$$

in cui

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e  $\lambda$  è una funzione della sola  $r$ .

(1) *Zur Theorie der Lichtstrahlen* (Sitzb. d. Berliner Ak. v. Jahre 1882).

• Se si cercano anzi i casi nei quali l'equazione generale

$$(3) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \sum_1^m \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$$

ammette degli integrali aventi la forma

$$(4) \quad \lambda f(r + at)$$

in cui

$$r = \left( \sum_1^m x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e  $\lambda$  è funzione della sola  $r$ , si trova che essi si limitano a due soli; a quello cioè in cui  $m = 1$ , ed all'altro in cui  $m = 3$ ; al primo dei quali corrisponde il noto integrale di D'Alembert; al secondo quello di Eulero (1).

• Ordinariamente quindi non si stabilisce pel caso delle onde cilindriche una formula simile a quella di Kirchhoff, nè si estende questa medesima formula al caso generale della equazione (3).

• 2. L'equazione (1'), ed in generale l'equazione (3), ammettono degli integrali aventi la forma (4), quando si esclude la condizione che  $\lambda$  debba esser funzione della sola  $r$ , ma si può provare che (all'infuori dei soliti due casi in cui  $m = 1$ ,  $m = 3$ )  $\lambda$  risulta una funzione polidroma, o una funzione che possiede delle singolarità, oltre che nel punto  $r = 0$ , anche in altri punti.

• Si consideri infatti l'equazione (1'). Essa ammette gl'integrali

$$(5) \quad \frac{\cos \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{r}} f(r + at), \quad \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{r}} f(r + at)$$

essendo

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

i quali sono manifestamente polidromi.

• Partendo da questi integrali è possibile procedere innanzi nel modo tenuto da Kirchhoff; ma è necessario fare una osservazione, la quale muta in modo sostanziale il risultato a cui si giunge.

• Avendo infatti presente il metodo tenuto da Kirchhoff, si ricorderà che allorché si applica il lemma di Green ad un campo nel cui interno si trova il punto  $r = 0$ , si deve escludere il punto stesso nel quale l'integrale di Eulero diviene infinito. Allorché si applica il lemma di Green per due variabili facendo uso di una delle funzioni (5) è necessario, non solo di escludere dal campo che si considera il punto  $r = 0$ , ma anche di eseguire un taglio che da questo punto vada al contorno del campo stesso in modo da

(1) Duhem, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*. Cours professé en 1890-91. Tome second, livre III, chap. VIII.

impedire che si possa girare attorno al punto  $r = 0$  che costituisce il punto di diramazione di ognuna delle due funzioni (5).

« Si vede quindi che le formule che in tal modo si trovano, restano affette da termini che non compariscono in quella di Kirchhoff. Dunque, benchè ottenute con un uguale procedimento, le formole stesse non possono usarsi per ricavare il valore di un integrale regolare  $V$  della (1') in un punto, mediante i valori di  $V$  e delle sue derivate nei punti del contorno di un campo che racchiude il punto stesso.

« Noi non staremo ad esporre i risultati che si trovano in questo modo, giacchè procederemo per altra via per ottenere delle formole analoghe a quella di Kirchhoff nel caso delle onde cilindriche, e per stabilire quindi delle formole generali da cui queste e quella di Kirchhoff possono ricavarsi come casi particolari.

« 3. Per semplicità supponiamo nella (1')  $a = 1$ , cioè di aver scelto le unità in modo che la velocità di propagazione delle onde sia eguale ad 1, il che è evidentemente sempre possibile.

« Supponendo  $V$  funzione di  $r$  e di  $t$  soltanto, potremo scrivere la (1')

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right).$$

« Consideriamo gli integrali di questa equazione aventi la forma

$$(I) \quad V_1 = \int_r^\infty f(t+u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}},$$

$$(II) \quad V_2 = \int_r^\infty f(t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}},$$

$$(III) \quad V_3 = \int_{-r}^r f(t+u) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}},$$

$$(IV) \quad V_4 = \int_{-r}^r f(t+u) \log \left( \frac{r^2 - u^2}{r} \right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}}$$

i quali possono scriversi ancora

$$(I') \quad V_1 = \int_0^\infty f(t+r \cosh u) du$$

$$(II') \quad V_2 = \int_0^\infty f(t-r \cosh u) du$$

$$(III') \quad V_3 = \int_{-1}^1 f(t+r \operatorname{sen} u) du$$

$$(IV') \quad V_4 = \int_{-1}^1 f(t+r \operatorname{sen} u) \log(r \cos^2 u) du.$$

• Affinchè l'integrale (I) sia finito, supporremo che la funzione arbitraria  $f(t)$  per valori dell'argomento superiori ad un certo limite, si annulli, mentre, affinchè l'integrale (II) sia finito ammetteremo che  $f(t)$  si annulli per valori dell'argomento inferiori ad un certo limite. Gli integrali (III') e (IV') non sono altro che quelli dati da Poisson (1).

• È facile dimostrare che se  $f$  è una funzione regolare, l'integrale  $V_3$  è pure regolare, mentre gli integrali  $V_1, V_2, V_4$  si conservano regolari pei valori di  $r$  diversi da zero, e si ha

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\log r} V_1 \right) &= -f(t), & \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial V_1}{\partial r} \right) &= -f(t) \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\log r} V_2 \right) &= -f(t), & \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial V_2}{\partial r} \right) &= -f(t) \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\log r} V_4 \right) &= \pi f(t), & \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial V_4}{\partial r} \right) &= \pi f(t). \end{aligned}$$

• 4. Ciò premesso indichiamo succintamente la via che può seguirsi per stabilire le formole a cui alludevamo precedentemente

• Siano  $\psi(x, y, t), \chi(x, y, t)$  due integrali della (1') regolari entro un campo  $\sigma$  a due dimensioni limitato da un contorno  $s$ . Per il lemma di Green avremo

$$\int_s \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \chi - \frac{\partial \chi}{\partial n} \psi \right) ds = \int_\sigma \left( \psi \Delta^2 \chi - \chi \Delta^2 \psi \right) d\sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma \left( \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\sigma$$

essendo  $n$  la normale ad  $s$  diretta verso l'interno di  $\sigma$ . Prendiamo  $\chi = V_1$ , in cui  $r$  denota la distanza contata da un punto  $x, y$ , fisso nell'interno di  $\sigma$ . Onde poter applicare l'equazione precedente, bisognerà escludere il punto  $x, y$  ove  $V_1$  cessa di esser regolare. Questa esclusione potrà farsi mediante un piccolo cerchio col centro nel punto stesso. Facendo decrescere indefinitamente il raggio di questo cerchio, otterremo al limite

$$2\pi\psi(x, y, t)f(t) + \int_s \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial n} \psi \right) ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma \left( \psi \frac{\partial V_1}{\partial t} - V_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\sigma.$$

• Si supponga ora che la funzione  $\psi$  si annulli in tutti i punti del campo  $\sigma$  per valori di  $t$  inferiori ad un certo limite. Per l'ipotesi fatta circa  $f(t)$ , avremo che  $V_1$  si annullerà per valori di  $t$  superiori ad un certo limite; quindi moltiplicando l'equazione precedente per  $dt$  e integrando fra  $-\infty$  e  $\infty$ , otterremo

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\psi(x, y, t)f(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_s \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial n} \psi \right) ds = 0.$$

(1) Journal de l'École Polytechnique, XIX, Cahier.

« Poniamo

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \psi_1(\xi, \eta, t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi_2(\xi, \eta, t)$$

denotando con  $\xi, \eta$ , le coordinate dei punti del contorno  $s$ ; allora con facili trasformazioni di calcolo, la formola precedente può scriversi

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \psi(x, y, t) f(t) dt + \\ + \int_s ds \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \psi_1(\xi, \eta, t) \int_r^{\infty} f(t+u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial u} \int_{-\infty}^{\infty} dt \psi_2(\xi, \eta, t) \int_r^{\infty} f(t+u) \frac{udu}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\}.$$

« Possiamo ora stabilire la formola di trasformazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) dt \int_r^{\infty} f(t+u) u(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_r^{\infty} \lambda(t-u) u(u) du.$$

« Applicandola alla equazione precedente essa diviene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \left[ 2\pi \psi(x, y, t) + \int_s ds \left\{ \int_r^{\infty} \psi_1(\xi, \eta, t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial u} \int_r^{\infty} \psi_2(\xi, \eta, t-u) \frac{udu}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\} \right] = 0$$

e siccome  $f(t)$  è una funzione arbitraria, così avremo

$$2\pi \psi(x, y, t) + \int_s ds \left\{ \int_r^{\infty} \psi_1(\xi, \eta, t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial u} \int_r^{\infty} \psi_2(\xi, \eta, t-u) \frac{udu}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\} = 0$$

« Usiamo i due simboli  $\frac{\partial}{\partial n}$  e  $\frac{\delta}{\delta n}$  per rappresentare le derivate rispetto ad  $n$  di una funzione di  $\xi, \eta, r$  prese supponendo rispettivamente  $r$  costante e  $\xi, \eta$  costanti. Cioè

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \\ \frac{\delta}{\delta n} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

• Allora la formula precedente si potrà scrivere

$$(A) \quad 2\pi \psi(x, y, t) = \int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \int_r^\infty \psi(\xi, \eta, t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial n} \int_r^\infty \psi(\xi, \eta, t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\}.$$

• È evidente la analogia che passa fra questa formula e quella di Kirchhoff, ponendo mente all'integrale (I) da cui siamo partiti, il quale corrisponde alla linea luminosa, come quello di Eulero corrisponde al centro luminoso.

• Invece di far uso dell'integrale (I), possiamo impiegare l'integrale (II). Supponendo ora che la funzione  $\psi(x, y, t)$  per valori di  $t$  superiori ad un certo limite si annulli, otteniamo la formula

$$(B) \quad 2\pi \psi(x, y, t) = \int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \int_r^\infty \psi(\xi, \eta, t+u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial n} \int_r^\infty \psi(\xi, \eta, t+u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\}.$$

• Partiamo dall'integrale (III) lasciando da parte le ipotesi fatte precedentemente riguardo ai valori di  $\psi(x, y, t)$  per valori di  $t$  inferiori o superiori a certi limiti.

• Avremo allora

$$(C) \quad 0 = \int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^r \psi(\xi, \eta, t+u) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^r \psi(\xi, \eta, t+u) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right\}.$$

• Finalmente partiamo dall'integrale (IV), pure tralasciando le ipotesi circa ai valori di  $\psi$  per  $t$  superiore o inferiore a certi limiti. Si troverà

$$(D) \quad 2\pi^2 \psi(x, y, t) = \int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left( \int_{-r}^r \psi(\xi, \eta, t-u) \log \left( \frac{r^2 - u^2}{r} \right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial n} \left( \int_{-r}^r \psi(\xi, \eta, t-u) \log \left( \frac{r^2 - u^2}{r} \right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right) \right\}.$$

• 5. Abbiamo così ottenuto quattro formule diverse; per vederne chiaramente il significato, immaginiamo che  $t$  rappresenti una terza coordinata.

per modo che  $\psi(x, y, t)$  possa considerarsi come una funzione dei punti di uno spazio a tre dimensioni riferito al sistema di assi cartesiani  $x, y, t$ .

• Supponendo  $s$  costituita da una sola linea, immaginiamo un cilindro avente per direttrice questa linea e le cui generatrici siano parallele all'asse  $t$ . Si prenda un punto  $x, y, t$  nell'interno di questo cilindro e si conduca per esso un piano parallelo al piano  $xy$ . Quindi su ogni generatrice, al di sopra e al di sotto di questo piano, si tagliano due segmenti uguali alla distanza del punto  $x, y, t$  dalla generatrice stessa.

• Gli estremi di questi segmenti costituiranno due linee  $L_1, L_2$ , le quali divideranno il cilindro in tre parti distinte. La formola (D) dà il valore di  $\psi(x, y, t)$  espresso mediante i valori di  $\psi$  e di  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  nei punti del cilindro compresi fra le due curve  $L_1, L_2$ , mentre ciascuna delle formole (A), (B) dà il valore di  $\psi(x, y, t)$  espresso mediante i valori di  $\psi$  e di  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  in una delle due altre regioni in cui il cilindro è stato diviso.

• Finalmente la formola (C) stabilisce una relazione che è la estensione di quella ben nota

$$\int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0,$$

a cui soddisfano le derivate normali lungo un contorno  $s$ , di una funzione armonica  $V$  regolare entro lo spazio racchiuso da  $s$ .

• Quando si supponga che le vibrazioni siano armoniche le formole (C) e (D) conducono a delle formole date da Weber (1), le quali hanno rispetto alle (C) e (D) stesse la medesima relazione che una ben nota formola di Helmholtz (2) ha con quella di Kirchhoff.

• 6. Esponiamo ora in poche parole la estensione alla equazione generale (3). È necessario distinguere due casi, secondoche  $m$  è dispari o pari.

• Nel primo caso posto  $m = 2p + 1$ , abbiamo che

$$W = \sum_{r=0}^p (-2)^{h-1} \frac{(2p-h-1)!}{(p-h)! (h-1)!} \frac{f^{(h-1)}(r \pm t)}{r^{2p-h}}$$

in cui  $f$  è una funzione arbitraria e

$$f', f'', \dots, f^{(p-1)}$$

ne sono le derivate, è un integrale della equazione differenziale (3).

(1) *Mathematische Annalen*. Bd. I.

(2) *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden*. — *Wiss. Abhandlungen* Bd. I.



• Applicando ora il procedimento di Kirchoff si giunge a stabilire il teorema seguente:

• Sia  $\psi(x_1 \dots x_m, t)$  un integrale regolare della (3) ed  $S_m$  un campo a  $m$  dimensioni limitato dal contorno  $S_{m-1}$  e che racchiude il punto  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Poniamo

$$\psi_h = \frac{\partial^h \psi}{\partial t^h}$$

e chiamiamo  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  le coordinate dei punti del contorno  $S_{m-1}$ ,  $n$  la sua normale. Avremo allora se  $m = 2p + 1$ ,

$$(E) \quad (4\pi)^p \psi(x_1 \dots x_m, t) = \int_{S_{2p}} \sum_{h=1}^p \frac{\partial^{2h-1}}{\partial \xi_h} \frac{(2p-h-1)!}{(p-h)! h!} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \psi_{h-1} \frac{(\xi_1 \dots \xi_m, t-r)}{r^{2p-h}} \right] - \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\psi_{h-1}(\xi_1 \dots \xi_m, t-r)}{r^{2p-h}} \right] dS_{2p}.$$

• I due simboli di derivazione rispetto alla  $n$  hanno l'analogo significato che avevano nelle formule precedenti, cioè

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{h=1}^m \frac{\partial}{\partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial n}, \quad \frac{\delta}{\delta n} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}.$$

• Nel caso di  $m$  pari la formula precedente non è evidentemente applicabile. Stabiliremo ora delle formule le quali valgono tanto se  $m$  è pari, quanto se è dispari.

• A tal fine prenderemo gli integrali

$$(I_a) \quad W_1 = \frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty f^{(m-2)}(t+u) (u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} du$$

$$(II_a) \quad W_2 = \frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty f^{(m-2)}(t-u) (u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} du$$

$$(III_a) \quad W_3 = \frac{1}{r^{m-2}} \int_{-r}^r f(t+u) (r^2 - u^2)^{\frac{m-3}{2}} du$$

della equazione (3) in cui  $f$  denota una funzione arbitraria. Soltanto ammetteremo, affinchè il primo integrale sia finito, che  $f$  si annulli per valori di  $t$  superiori ad un certo limite, e perchè il secondo integrale sia finito, supporremo che  $f$  si annulli per valori di  $t$  inferiori ad un certo limite.

• Applicando ora un metodo analogo a quello seguito nel § 4 si giunge al teorema seguente:

\* Restando le stesse le condizioni poste nel teorema precedente, solo non facendo più l'ipotesi che  $m$  sia dispari, si ha

$$(A_a) \quad 2\pi^{\frac{1}{2}m} \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(\frac{1}{2}m)} \psi(x_1 \dots x_m, t) = \\ = \int_{S_{m-1}} dS_{m-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty \psi'_{m-2}(\xi_1 \dots \xi_m, t-u) (u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} du \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty \psi'_{m-2}(\xi_1 \dots \xi_m, t-u) (u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} du \right] \right\}$$

$$(B_a) \quad 2\pi^{\frac{1}{2}m} \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(\frac{1}{2}m)} \psi(x_1 \dots x_m, t) = \\ = \int_{S_{m-1}} dS_{m-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty \psi'_{m-2}(\xi_1 \dots \xi_m, t+u) (u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} du \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty \psi'_{m-2}(\xi_1 \dots \xi_m, t+u) (u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} du \right] \right\}$$

$$(C_a) \quad 0 = \int_{S_{m-1}} dS_{m-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{r^{m-2}} \int_{-r}^r \psi(\xi_1 \dots \xi_m, t-u) (u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} du \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{r^{m-2}} \int_{-r}^r \psi(\xi_1 \dots \xi_m, t-u) (u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} du \right] \right\}$$

nella prima delle quali si suppone che  $\psi$  si annulli per valori di  $t$  inferiori ad un certo limite, e nella seconda si suppone invece che  $\psi$  si annulli per valori di  $t$  superiori ad un certo limite. La formola (A<sub>a</sub>) si riduce alla (E) nel caso di  $m$  dispari; soltanto è da osservare che nello stabilire la (E) non si è fatta alcuna ipotesi circa ai valori di  $\psi$  per valori di  $t$  inferiori ad un certo limite.

\* 7. Nel caso di  $m$  pari, la equazione (3) ammette anche un quarto integrale oltre (I<sub>a</sub>), (II<sub>a</sub>), (III<sub>a</sub>) da cui può ricavarsi una formola analoga alla (D).

Denotiamo col simbolo  $\mathcal{F}$  la operazione  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ . Allora questo quarto integrale potrà scriversi

$$(IV_a) \quad W_4 = \mathcal{F}^{p-1} \int_{-r}^r f(t+u) \log \left( \frac{r^2 - u^2}{r} \right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}}$$

\* Si riconosce facilmente che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ r^{3p-2} W_4 \right\} = \pi (-2)^{p-2} (p-2)! f(t)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ r^{2p-1} \frac{\partial W_4}{\partial r} \right\} = \pi (-2)^{p-1} (p-1)! f(t)$$

ed applicando un procedimento simile a quello seguito nei §§ precedenti si giunge al seguente teorema:

• Restando le stesse le condizioni del 1° teorema del § 6, supponendo soltanto che  $m$ , invece di esser dispari sia pari ed eguale a  $2p$ , si ha

$$(D_a) \quad 2^p (-\pi)^{p+1} \psi(x_1, x_2 \dots x_{2p}, t) = \\ = \int_{\frac{\partial}{\partial n} S_{2p-1}} \int_{-r}^r \psi(\xi_1, \dots, \xi_{2p}, t-u) \log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} - \\ - \frac{\partial}{\partial n} r^{p-1} \int_{-r}^r \psi(\xi_1, \dots, \xi_{2p}, t-u) \log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} dS_{2p-1}.$$

**Matematica.** — *Sulla superficie del 5° ordine dotata di cubica doppia e punto triplo.* Nota di A. DEL RE, presentata dal Socio BATTAGLINI.

• In questa Nota, quale continuazione dell'argomento riguardante le superficie fondamentali dei connessi spaziali (1, 2), io tratto della superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo (1). Io ne ho data una costruzione nel *Giornale di Battaglini* del 1888 (2), riguardandola come superficie polare congiunta (3) rispetto ad un certo connesso piano-retta (2, 3) e ad una quadrica. Qui, partendo da una tale costruzione, mi propongo di cominciare uno studio della superficie che, come si vedrà anche dalle Note che seguiranno la presente, condurrà ad importanti proprietà della medesima.

§ I.

*Provenienza della superficie — Rette pel punto triplo.  
Rappresentazione parametrica.*

• 1. Siano

$$f \equiv \sum f_{ik} x_i x_k = 0, \quad g \equiv \sum g_{ik} x_i x_k = 0, \quad \psi \equiv \sum \psi_{ik} x_i x_k = 0$$

(1) Cfr. le mie Note: *Sulla superficie del 5° ordine ecc.*, questi Rend. Ann. 1890; *Di cinque sup. del 5° ordine ecc.* Ibid. Ann. 1891. *Su una sup. del 5° ordine dotata ecc.* Ibid. A proposito di quest'ultima superficie, colgo qui l'occasione per far notare come, da un punto di vista diverso da quello da me tenuto, essa venne incontrata, per la prima volta, dal Cremona nella sua classica Memoria *Sulle trasformazioni birazionali dello spazio* (Rend. Ist. Lombardo, An. 1871), trattando di un caso particolare di tali trasformazioni.

(2) Cfr. *Quistione* 85.

(3) Io ho definite e trattato delle proprietà generali di queste superficie nei Rend. della R. Acc. di Napoli, An. 1887.