ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

ed applicando un procedimento simile a quello seguito nei §§ precedenti si giunge al seguente teorema:

« Restando le stesse le condizioni del 1° teorema del § 6, supponendo soltanto che m, invece di esser dispari sia pari ed eguale a $2p$, si ha

$$(\mathrm{D}_a)\qquad 2^p(-\pi)^{p+1}\psi(x_1, x_2 \dots x_{2p}, t) = \\ = \int_{s_{2p-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} r^{p-1} \int_{-r}^{r} \psi(\xi_1 \dots \xi_{2p}, t-u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} - \right. \\ \left. - \frac{\delta}{\delta n} r^{p-1} \int_{-r}^{r} \psi(\xi_1 \dots \xi_{2p}, t-u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right\} dS_{2p-1} \text{ ».}$$

Matematica. — *Sulla superficie del 5° ordine dotata di cubica doppia e punto triplo.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio Battaglini.

« In questa Nota, quale continuazione dell'argomento riguardante le superficie fondamentali dei connessi spaziali (1, 2), io tratto della superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo ([1]). Io ne ho data una costruzione nel *Giornale di Battaglini* del 1888 ([2]), riguardandola come superficie polare congiunta ([3]) rispetto ad un certo connesso piano-retta (2, 3) e ad una quadrica. Qui, partendo da una tale costruzione, mi propongo di cominciare uno studio della superficie che, come si vedrà anche dalle Note che seguiranno la presente, condurrà ad importanti proprietà della medesima.

§ I.

Provenienza della superficie — Rette pel punto triplo.
Rappresentazione parametrica.

« 1. Siano

$$f \equiv \Sigma f_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,, \qquad \varphi \equiv \Sigma \varphi_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,, \qquad \psi \equiv \Sigma \psi_{ik}\, x_i\, x_k = 0$$

([1]) Cfr. le mie Note: *Sulla superficie del 5° ordine* ecc., questi Rend. Ann. 1890; *Di cinque sup. del 5° ordine* ecc. Ibib. Ann. 1891. *Su una sup. del 5° ordine dotata* ecc. Ibib. A proposito di quest'ultima superficie, colgo qui l'occasione per far notare come, da un punto di vista diverso da quello da me tenuto, essa venne incontrata, per la prima volta, dal Cremona nella sua classica Memoria *Sulle trasformazioni birazionali dello spazio* (Rend. Ist. Lombardo, An. 1871), trattando di un caso particolare di tali trasformazioni.

([2]) Cfr. *Quistione* 85.

([3]) Io ho definite e trattato delle proprietà generali di queste superficie nei Rend. della R. Acc. di Napoli, An. 1887.

le equazioni di tre quadriche non di uno stesso fascio. Se si forma il fascio delle prime due

$$\lambda f + \mu\varphi = 0$$

si avranno per ogni piano u_i le equazioni

$$\sigma : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \begin{Vmatrix} u_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ u_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ u_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ u_4 & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

ove si è messo per brevità $c_{ik} = \lambda f_{ik} + \mu\varphi_{ik}$ $(ik = 12, \dots, 34)$; e queste equazioni rappresentano nel parametro $\lambda : \mu$ una cubica gobba *percorsa* dal punto x_i $(i = 1, \dots, 4)$, e nei parametri $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ un sistema lineare ∞^3 di tali cubiche, aventi a comune i punti A_k con coordinate che soddisfanno alle equazioni

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \dots, 4) \tag{2}$$

quando per $\lambda : \mu$ si pongono successivamente le radici σ_k $(k = 1, \dots, 4)$ dell'equazione:

$$\det. \mid \lambda f_{ik} + \mu \varphi_{ik} \mid = 0. \tag{3}$$

« Se indichiamo con C_{ik} il sub-determinante complementare dell'elemento c_{ik} in $|c_{ik}|$, le (1) possono essere scritte, omettendo il fattore di proporzionalità σ, così:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \sum_1^4 C_{i1}\, u_i : \sum_1^4 C_{i2}\, u_i : \sum_1^4 C_{i3}\, u_i : \sum_1^4 C_{i4}\, u_i \tag{1'}$$

da cui si vede che, se sono ξ_i le coordinate di un punto fisso P, per avere punti di una superficie polare congiunta Φ_P [1], occorre, facendo intervenire la quadrica $\psi = 0$, che si abbia

$$\nu \xi_k + \tau x_k = \sum_i C_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \qquad (k = 1, \dots, 4) \tag{4}$$

« Ponendo

$$D_{rs} = C_{1r}\, \psi_{1s} + C_{2r}\, \psi_{2s} + C_{3r}\, \psi_{3s} + C_{4r}\, \psi_{4s} \tag{5}$$

le precedenti equazioni si possono scrivere così:

$$\left.\begin{aligned} \nu\xi_1 &= (D_{11} - \tau)\, x_1 + D_{12}\, x_2 + D_{13}\, x_3 + D_{14}\, x_4 \\ \nu\xi_2 &= D_{21}\, x_1 + (D_{22} - \tau)\, x_2 + D_{23}\, x_3 + D_{24}\, x_4 \\ \nu\xi_3 &= D_{31}\, x_1 + D_{32}\, x_2 + (D_{33} - \tau)\, x_3 + D_{34}\, x_4 \\ \nu\xi_4 &= D_{41}\, x_1 + D_{42}\, x_2 + D_{43}\, x_3 + (D_{44} - \tau)\, x_4 \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

ed è chiaramente

$$D_{rs} = D_{sr}\,, \quad |D_{rs}| = |C_{rs}| \,.\, |\psi_{rs}| = |C_{rs}|^3\, |\psi_{rs}|.$$

(1) Cfr. la mia citata Memoria nei Rend. di Napoli.

Le formule precedenti possono essere risolute rispetto alle x. Detto $\Delta(\tau)$ il determinante dei coefficienti e $\Delta_{rs}(\tau)$ il complemento algebrico dell'elemento sulla $r.^{ma}$ orizz. ed $s.^{ma}$ verticale, si ha:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \Sigma \Delta_{i1}(\tau) \,.\, \xi_i : \Sigma \Delta_{i2}(\tau) \,.\, \xi_i : \Sigma \Delta_{i3}(\tau) \,.\, \xi_i : \Sigma \Delta_{i4}(\tau) \,.\, \xi_i \tag{6}$$

2. Queste formule permettono di fare una rappresentazione uniforme della superficie sopra un piano. Esse mostrano già questo primo fatto che per la superficie Φ_P il punto P è triplo e che su essa giace il sistema delle cubiche sghembe rappresentate parametricamente dalle (6) e corrispondenti ciascuna ad un determinato valore del parametro $\lambda : \mu$.

Queste cubiche, del resto, rispondono ad una definizione geometrica assai semplice: la cubica corrispondente al valore $\lambda_0 : \mu_0$ del parametro $\lambda : \mu$ è la cubica luogo dei punti allineati con P e con i proprî corrispondenti nell'omografia risultante dal comporre la polarità rispetto a $\psi = 0$ con la polarità rispetto a $\lambda_0 f + \mu_0 \varphi = 0$. E da ciò segue senz'altro che tali cubiche passano tutte per i 4 punti A_k, e che quindi le rette $PA_k \equiv a_k$ sono quattro rette della superficie uscenti dal punto triplo. Ma quest'ultima circostanza risulta anche dal ragionamento seguente, il quale fornisce ancora, con una certa rapidità, le equazioni delle 4 rette quando sono conosciute le radici della (3).

Scriviamo per disteso i valori delle x forniti dalle (6); avremo, ponendo $\mathfrak{D} = | D_{rs} |$ e facendo $\tau = 1$, il che non altera nulla:

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 = \xi_1 \left\{ -1 + \sum_{i=2}^{i=4} D_{ii} - \frac{\partial}{\partial D_{11}} \left(\sum_{i=2}^{i=4} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial D_{ii}} + \mathfrak{D} \right) \right\} &+ \xi_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial D_{21}} \left(\mathfrak{D} - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial D_{33}} - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial D_{44}} \right) - D_{12} \right\} \\
&+ \xi_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial D_{31}} \left(\mathfrak{D} - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial D_{22}} - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial D_{44}} \right) - D_{13} \right\} \\
&+ \xi_4 \left\{ \frac{\partial}{\partial D_{41}} \left(\mathfrak{D} - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial D_{22}} - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial D_{33}} \right) - D_{14} \right\}
\end{aligned} \tag{7}$$

ed espressioni analoghe per x_2, x_3, x_4. — Supponendo, per semplicità $| \psi_{rs} | = 1$, cosa che può sempre farsi finchè $\psi = 0$ non degenera, ed osservando che allora è $\mathfrak{D} = | C_{rs} | = \mathfrak{C}$, e quindi anche

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial D_{ik}} = \sum_l \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial C_{li}} \cdot \frac{\partial C_{li}}{\partial D_{ik}} = | c_{ik} |^2 . \sum c_{li} \frac{\partial C_{li}}{\partial D_{ik}}$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial D_{ik} \, \partial D_{pq}} = \sum_{l,m} \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial C_{li} \, \partial C_{mp}} \frac{\partial C_{li}}{\partial D_{ik}} \frac{\partial C_{mp}}{\partial D_{pq}} = | c_{ik} | . \sum_{l,m} \text{compl.} \frac{\partial^2 | c_{ik} |}{\partial c_{li} \, \partial c_{mp}} \cdot \frac{\partial C_{li}}{\partial D_{ik}} \frac{\partial C_{mp}}{\partial D_{pq}}$$

le formule precedenti mostrano che per un punto per cui $\lambda:\mu=\sigma_k$ si ha

$$\left.\begin{aligned}\sigma x_1 &= \quad (D_{22}+D_{33}+D_{44}-1)\,\xi_1 - D_{12}\,\xi_2 - D_{13}\,\xi_3 - D_{14}\,\xi_4\\ \sigma x_2 &= -D_{21}\,\xi_1 + (D_{11}+D_{33}+D_{44}-1)\,\xi_2 - D_{23}\,\xi_3 - D_{24}\,\xi_4\\ \sigma x_3 &= -D_{31}\,\xi_1 - D_{32}\,\xi_2 + (D_{11}+D_{22}+D_{44}-1)\,\xi_3 - D_{34}\,\xi_4\\ \sigma x_4 &= -D_{41}\,\xi_1 - D_{42}\,\xi_2 - D_{43}\,\xi_3 + (D_{11}+D_{22}+D_{33}-1)\,\xi_4\end{aligned}\right\}; \qquad (8)$$

e quindi se, dopo aver diviso per μ^3, si pone

$$h_{ii}^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{1}{\mu^3}(D_{ll}+D_{mm}+D_{nn})\,\xi_i - D_{il}\,\xi_l - D_{im}\,\xi_m - D_{in}\,\xi_n \quad (i,k,l,m=1,2,3,4)$$

$$\frac{1}{\mu^3}=\theta\,,$$

nella ipotesi che sia $\lambda:\mu=\sigma_k$, le formule (8) possono essere messe nella forma

$$x_i = h_{ii}^{(\sigma k)} - \theta\xi_i \qquad (i=1,\ldots,4) \qquad (9)$$

dalla quale si vede che esse rappresentano una retta pel punto ξ_i: la retta a_k. Per $k=1,\ldots,4$ si hanno così le equazioni di tutte le 4 rette a_k.

« 3. Se nelle (4′) si mantengon ferme le x_i e si suppongono variabili le ξ_i si avrà il luogo dei punti le cui superficie polari congiunte passano per ξ_i. Nella ipotesi dunque che al posto delle x_i si pongono le ξ_i, e viceversa, le (4′) rappresentano nelle x_i il cono C_P tangente nel punto triplo della superficie [1]; e questo, vista la sua rappresentazione parametrica, è evidentemente razionale. D'altronde che sia razionale lo si vede anche da che, in grazia delle (1′), esso proietta da ξ_i la cubica sghemba la cui rappresentazione parametrica è

$$x_k = \sum_{i=1}^{i=4} C_{ik}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i} \qquad (k=1,\ldots,4) \qquad (10)$$

« Questa cubica non è sulla superficie: noi la diremo Q^3; essa è definita geometricamente dalla proprietà di essere il luogo dei trasfomati del punto triplo per mezzo delle omografie $\Omega_{\lambda,\mu}$ risultanti dal comporre la polarità rispetto a $\psi=0$ con le polarità rispetto a $\lambda f+\mu\varphi=0$. Sulla superficie giace, invece, il luogo dei trasformati di P nelle inverse delle omografie $\Omega_{\lambda,\mu}$: esso è la retta dei punti η_i per cui

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta_i}=\frac{\partial}{\partial\xi_i}(\lambda f+\mu\varphi) \qquad (i=1,\ldots,4) \qquad (11)$$

e si può anche definire come la polare, rispetto a $\psi=0$, della coniugata del punto P rispetto al fascio $\lambda f+\mu\varphi=0$. Noi la diremo b, mentre diremo c la generatrice doppia del cono C_P; e ci sarà utile

(1) Cf., la mia cit. Memoria.

di osservare che passando da punto a punto nello spazio la retta b della superficie polare congiunta e quella doppia c del cono polare congiunto descrivono due complessi tetraedrali Ω_b, Ω_c polari l'uno dell'altro rispetto a $\psi=0$.

Infatti, c è appoggiata in due punti alla cubica Q^3; perciò essa contiene i poli P_1, P_2 di uno stesso piano π rispetto a due delle superficie $\lambda f+\mu\varphi=0$, ed è quindi una retta del complesso Ω_c, generato (¹) dalle polari dei punti dello spazio rispetto al fascio $\lambda f+\mu\varphi=0$. Ma da ciò segue allora che b è nel complesso Ω_b polare di Ω_c rispetto a $\psi=0$. In generale però è ad osservarsi, ciò che del resto è evidente, che b e c non sono rette polari fra loro.

§ II.

Sestica fissa sulla superficie. — Intervento di nuove rette. Curva doppia.

4. Se si formano le equazioni

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x'_i}(\lambda f+\mu\varphi) \qquad (i=1\,,\ldots.\,4) \tag{12}$$

delle omografie del sistema $\Omega_{\lambda,\mu}$ e si pone

$$c_{ik}-\sigma\psi_{ik}=\mathbf{i}_k \tag{13}$$

pei valori di σ radici dell'equazione biquadratica

$$\det.\,|\,\mathbf{i}_k\,|=0 \tag{14}$$

i punti

$$x_1:x_2:x_3:x_4=(\mathbf{p}_2\,\mathbf{q}_3\,\mathbf{r}_4):(\mathbf{p}_3\,\mathbf{q}_4\,\mathbf{r}_1):(\mathbf{p}_4\,\mathbf{q}_1\,\mathbf{r}_2):(\mathbf{p}_1\,\mathbf{q}_2\,\mathbf{r}_3)$$

ove p, q, r sono tre dei numeri $1\,,\ldots,4$, soddisfanno, indipendentemente dalle ξ_i alle equazioni (4'). Ma tali punti al variare del parametro $\lambda:\mu$ descrivono la curva nodale (jacobiana) della rete $(\mathfrak{R})\equiv\lambda f+\mu\varphi+\nu\psi=0$; dunque si può dire che dovunque sia scelto il polo P la sua superficie polare congiunta Φ_p passa per una curva fissa N^6 del sesto ordine, la quale è nel medesimo tempo il luogo dei vertici dei coni della rete $(\mathfrak{R})$ ed il luogo dei punti uniti delle omografie $\Omega_{\lambda,\mu}$ (²).

5. La N^6 ha altre proprietà conosciute: i piani polari di un suo

(¹) Il complesso delle polari dei punti dello spazio rispetto ad un fascio di quadriche è il complesso che si ottiene dal congiungere le diverse coppie di punti corrispondenti, o dal trovare le intersezioni delle diverse coppie di piani corrispondenti nell'omografia risultante dal comporre le polarità rispetto a due delle quadriche del fascio (Cfr. Reye, *Géométrie de Position*, t. II).

(²) Questi punti sono pure uniti per le omografie che risultano dalla composizione delle polarità rispetto a due quadriche qualunque della rete $(\mathfrak{R})$.

punto qualunque, rispetto alle quadriche di ($\mathfrak{N}$) formano fascio attorno ad una sua trisecante; e per ogni punto di N^6 passano perciò tre di tali trisecanti [1]. Inoltre, poichè se una retta m si appoggia ad una trisecante di N^6 la polare del punto di appoggio rispetto a $\lambda f + \mu\varphi = 0$, incontra N^6, ne segue che m incontra tante trisecanti quanti sono i punti comuni ad N^6 ed alla quadrica polare dei punti di m, meno, ben inteso, i 4 punti A_k. E quindi la rigata R^8 luogo delle trisecanti di N^6 è dell'8° ordine e possiede N^6 per curva tripla. Questa R^8 è del resto contenuta in una infinità di complessi tetraedrali, in quelli cioè che sono generati dalle $\Omega_{\lambda,\mu}$.

« 6. Finchè la rete ($\mathfrak{N}$) è generale, niuna delle omografie $\Omega_{\lambda,\mu}$ è assiale; ma se per posizioni speciali della $\psi = 0$ rispetto a $\lambda f + \mu\varphi = 0$ qualcuna lo fosse e possedesse $k = 1, 2$ assi di punti uniti, e quindi anche k assi di piani uniti, allora dalla N^6 si staccherebbero gli assi di punti uniti riducendosi tal curva ad una N^{6-k}, e le sue trisecanti si ridurrebbero a delle $(3 - k)$ secanti della N^{6-k}. Possiamo noi dunque concludere che per degenerazione della sestica N^6 la superficie assume altre rette: queste però sono allora comuni alle superficie polari congiunte di tutti i punti dello spazio. La degenerazione di N^6 è conseguenza dell'esservi o non un valore del parametro $\lambda : \mu$ in virtù del quale una radice della equazione (14), oltre ad annullare il determinante $| \mathbf{i}_K |$ annulli anche i suoi minori del 3° ordine senza annullare quelli del 2° ordine: quest'ultima circostanza farebbe degenerare la superficie.

« 7. Riserbandoci di fare altrove una classifica delle super-cie Φ_P dal punto di vista della situazione delle rette di cui si è ora parlato, di quelle di cui si è parlato nel § I, e delle altre rette che la superficie possiede, trattiamo della curva doppia. L'esistenza di questa è subito messa in rilievo dal fatto che, essendo il cono C_P il luogo dei punti P_i le cui superficie Φ_{P_i} passano per P, la generatrice doppia c del cono C_P è il luogo dei punti le cui superficie polari congiunte passano per P con due falde. Siccome un punto arbitrario P dello spazio sta in ∞^1 rette c, cioè sulle generatrici del cono quadrico (P) del complesso Ω_c, la superficie Φ_P passerà con due falde per tutti i punti P_i, P compreso, pei cui coni C_{P_i} sono $\overline{P_i P}$ le generatrici doppie. Una tal curva, giacendo sopra un cono quadrico, e non avendo oltre del vertice di questo in comune che un sol punto con ogni generatrice di esso, è una cubica gobba. Noi concludiamo dunque che la superficie Φ_P ha una curva doppia del 3° ordine che passa pel punto triplo e sta sul cono del complesso tetraedrale Ω_c che ha il vertice nel punto P. Noi diremo φ^3 una tal curva doppia: essa degenera in una retta per P se P è su R^8

[1] Cfr. Reye, Op. cit.

ed in una conica, o in tre rette se P è su N°. In questo secondo caso degenera però anche la superficie. Vedremo in una Nota, che farà seguito alla presente, come costruire con facilità la curva doppia e come scriverne con rapidità le equazioni ».

Chimica. — *Sopra alcuni derivati delle fenilendiammine* (1).

Nota di Pietro Gucci, presentata dal Socio Cannizzaro.

« Fino dal 1887 ho descritto la *solfocarbonilfenilendiammina* (2) corrispondente alla formula $C_6H_4(NH)_2CS$, fino allora sconosciuta, che ottenni con ottimo rendimento facendo reagire in tubo chiuso a 150° il solfuro di carbonio sulla *m*-fenilendiammina.

« Ho voluto studiare ora l'azione del solfuro di carbonio anche sull'*orto*- e sulla *p*-fenilendiammina, collo scopo di preparare direttamente le altre due solfocarbonilfenilendiammine o fenilensolfouree che vogliano chiamarsi.

Solfocarbonil-orto-fenilendiammina o o-*fenilensolfourea.*

« Questo composto fu già ottenuto dal Lellmann (3) per via indiretta, partendo dal cloridrato di *o*-fenilendiammina e solfocianato di ammonio e decomponendo poi col calore il solfocianato di fenilendiammina con essi preparato. Richiese poi decolorazione con carbone animale e ripetute cristallizzazioni nell'alcool acquoso.

« Fu ottenuto anche dal Billeter e Steiner (4) insieme ad altre sostanze nella reazione del cloruro di tionile sopra la *o*-fenilendiammina.

« Io ho potuto preparare tale composto allo stato di chimica purezza, direttamente e con un rendimento, si può dire, teorico, adottando il processo sopra accennato con cui ottenni il composto corrispondente della *m*-fenilendiammina.

« Introdussi in un tubo di vetro gr. 3 di *o*-fenilendiammina di recente preparata (p. eboll. 251-252°: p. fus. 102-103°), la sciolsi in un poco di alcool assoluto e vi aggiunsi circa gr. 2,5 di solfuro di carbonio (calcol. gr. 2,13). Chiusi il tubo alla lampada e scaldai nell'acqua bollente.

« Dalla miscela liquida, in capo a due ore, cominciò a separarsi il composto formando al fondo del tubo una massa cristallina semitrasparente e scolorata.

« Non avvertii separazione di composti intermedi come nel caso della fenilendiammina-*meta* (5).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico di Roma.
(2) Gazz. chim. ital. XVII, p. 523 (1887).
(3) Ann. 221, p. 9.
(4) Ber. 20, 231.
(5) Gazz. chim. ital. loco cit.