ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

« La soluzione filtrata col raffreddamento lasciò depositare delle laminette leggermente colorate in giallognolo che fondevano decomponendosi alla temperatura di 200°. Il suo etere metilico, ottenuto per azione dell'acido cloridrico sulla soluzione metilica, cristallizza in begli aghi setacei che fondono alla temperatura di 74°.

« Con queste ricerche si completa la serie dei dicarboacidi pirrazolici; rimane da stabilire la posizione dei carbossili negli acidi descritti in questa Nota. Di questo problema ci occuperemo, studiando il metilpirrazolo derivante dall'acido 1fenil-metil-carbo-pirrazolico fusibile a 191°,-192°,5 ».

Matematica. — *Ancora della superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio Battaglini.

« Questa Nota contiene una nuova costruzione della superficie oggetto della Nota precedente, la costruzione della curva doppia, l'equazione del connesso piano-retta (2, 3) produttore della superficie, l'equazione di un connesso punto-piano (1, 2) di cui è superficie fondamentale, e poi anche due modi diversi di arrivare con rapidità all'equazione della superficie medesima.

§ I.

Costruzione della superficie. — Altre proprietà.

« 1. Una osservazione molto semplice conduce ad una nuova costruzione della superficie, la quale oltre al metterne in rilievo varie altre proprietà la ravvicina a quell'altra categoria di superficie del 5° ordine ed a punti tripli che io feci provenire come superficie fondamentali di connessi punto-piano (1, 2) ed anche a quelle di ordine $n(3n+2)$ che trattai nel § V del mio articolo *Escursioni matematiche diverse* (1). L'osservazione consiste in quanto segue. — Dimostrai già nella mia Memoria *Sulle sup. pol. cong. rispetto ad un connesso* ecc. (2) che le superficie polari congiunte dei punti di una retta p passano per $r(n-1)$ punti fissi di questa retta, dove r è il grado di un complesso qualunque del connesso ed n è l'ordine della superficie fondamentale. Ne segue, nel caso nostro, che gli ulteriori punti comuni alla Φ_P e ad una retta arbitraria p condotta per P hanno un significato indipendente dalla posizione di P sopra p: essi sono, nel fatto, i punti nei quali p incontra la rigata R_p, polare reciproca rispetto a $\psi=0$ (3), della rigata polare di p

(1) Giornale di Battaglini. An. 1890.

(2) Rend. Acc. Napoli Ann. 1887.

(3) Per le notazioni, pel richiamo e pel significato di certe equazioni si confronti la Nota precedente.

rispetto al fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$. Se si immaginano presi tre punti arbitrarî $\eta_i^{(k)}$ $(i = 1, \dots, 4;\ k = 1, 2, 3)$ non allineati nè complanari con P, una retta arbitraria p per P si potrà immaginare rappresentata dalle equazioni

$$z_i = \sigma\xi_i + \tau\eta_i \qquad (i = 1, \dots, 4) \qquad (15)$$

ove è $\eta_i \equiv \varkappa_1 \eta_i^{(1)} + \varkappa_2 \eta_i^{(2)} + \varkappa_3 \eta_i^{(3)}$ e $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ sono tre parametri variabili colla retta; e la quadrica polare di p rispetto al fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$ si otterrà allora rendendo soddisfatta, indipendentemente da λ, μ, l'equazione

$$\lambda f_{zx} + \mu\varphi_{zx} = 0$$

dove g_{zx} è la forma polare del punto z_i rispetto alla forma g $(g \equiv f, \varphi)$. Ciò esige che si abbia

$$f_{\xi x}\,\varphi_{\tau x} - f_{\tau x}\,\varphi_{\xi x} = 0\,,$$

ovvero, osservando che

$$f_{\tau x} = \varkappa_1 f_{\eta^{(1)}x} + \varkappa_2 f_{\eta^{(2)}x} + \varkappa_3 f_{\eta^{(3)}x}\,; \quad \varphi_{\tau x} = \varkappa_1 \varphi_{\eta^{(1)}x} + \varkappa_2 \varphi_{\eta^{(2)}x} + \varkappa_3 \varphi_{\eta^{(3)}x}$$

e ponendo

$$\mathfrak{F}_k = f_{\xi x}\,\varphi_{\eta^{(k)}x} - f_{\eta^{(k)}x}\,\varphi_{\xi x}$$

che si abbia

$$\sum_1^3 \varkappa_k \mathfrak{F}_k = 0\,. \qquad (16)$$

« Questa è dunque l'equazione della quadrica polare di p rispetto al fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$.

« Poichè i parametri $\varkappa_i$ entrano in essa linearmente, si vede che le rigate polari di tutte le rette di P formano una rete. Il modo come poi entrano le $f_{\xi x}$, $\varphi_{\xi x}$ nelle $\mathfrak{F}_k$ mostrano che tutte le rigate di una tal rete passano per la retta

$$f_{\xi x} = 0\,, \qquad \varphi_{\xi x} = 0\,,$$

cioè, come del resto si vede anche direttamente, per la coniugata b' di P rispetto a $\lambda f + \mu\varphi = 0$. Direttamente si vede anche che tutte tali rigate passano pei 4 punti A_k.

« Mutando per polarità rispetto a $\psi = 0$, se indica con Ψ la forma aggiunta di ψ, si ha che $\mathfrak{F}_k$ si muta, un fattore di proporzionalità eccettuato, in

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \cdot \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_i^{(k)}}\frac{\partial \Psi}{\partial u_i} - \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}\frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \cdot \sum_i \frac{\partial f}{\partial \eta_i^{(k)}}\frac{\partial \Psi}{\partial u_i}$$

ovvero, posto

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_l^{(k)}} - \frac{\partial f}{\partial \eta_l^{(k)}}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = \mathfrak{H}_{il}^{(k)} \ (il = 11, \dots, 14, 22, \dots, 24, \dots) \qquad (17)$$

ed

$$\mathfrak{H}_{il}^{(k)}\,\Psi_{ip}\,\Psi_{lp} = \mathfrak{G}_{il,pq}^{(k)} \ (p, q = 1, \dots, 4) \qquad (18)$$

in

$$\sum_{q=1}^{4} \sum_{p=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} \mathfrak{G}_{il,pq}\, u_p\, u_q = 0. \qquad (19)$$

« Cosicchè, ponendo anche, per brevità,

$$\mathbf{F}^{(k)}_{pq} = \sum_l \sum_i \mathfrak{G}^{(k)}_{il,pq}\,, \qquad \mathbf{F}_k = \sum_p \sum_q \mathbf{F}^{(k)}_{pq}\, u_p\, u_q$$

la rete-punteggiata (16) si muta nella rete-tangenziale

$$\sum_1^3 \varkappa_k \mathbf{F}_k = 0. \tag{20}$$

« Le rigate di questa sono inscritte tutte nel tetraedro dei piani α'_i polari dei punti A_i rispetto a $\psi = 0$, e passano tutte per la retta b della superficie. Intanto per mezzo delle (15) e della (20) la retta p e la rigata R_p si trovano fra loro riferite proiettivamente. Si può dunque concludere che la superficie Φ_P si può ottenere come luogo delle intersezioni delle rette per P e delle quadriche della rete tangenziale (20) riferite proiettivamente a quelle rette.

« 2. Da questa costruzione semplice della superficie segue la seguente semplicissima della sua curva doppia. Una retta p di P incontra ulteriormente Φ_P in un suo punto doppio se la quadrica corrispondente di p degenera in una conica col suo piano contato per due. Ora le quadriche della rete-tangenziale (20) degenerate in coniche sono le quadriche che si riducono ai piani del fascio (b). Ne segue che cercando di un punto M′ di b' la polare m rispetto al fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$ ed il piano polare μ, rispetto a $\psi = 0$, il punto $\mu m \equiv M$ descriverà la cubica φ^3 quando M′ descrive b'.

« Da questa costruzione di φ^3 segue che b è una sua corda. Sono poi, evidentemente, anche sue corde le 4 rette a_k. Incontreremo altrove in altre 6 sue corde, sei rette della superficie.

« Intanto ecco una prima importante conseguenza della costruzione precedente. La φ^3 è il luogo di punti x_i i quali soddisfanno alle equazioni

$$\sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\,, \qquad \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \tag{21}$$

ed all'equazione d'incidenza

$$u_x = 0 \tag{22}$$

quando le u_i siano determinate per mezzo delle equazioni

$$\sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = 0\,, \qquad \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = 0 \tag{23}$$

e sia $\Psi = 0$ la forma aggiunta della $\psi = 0$.

« Ora, posto

$$\sum_p \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \cdot f_{ip} = \alpha_p(u)\,, \qquad \sum_p \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \cdot \varphi_{ip} = \beta_p(u)$$

dalle (21), (22) si cava

$$x_i = \Big(\alpha(u)\, \lambda(u)\, u\Big)_i \qquad (i = 1, \dots, 4) \tag{24}$$

Esprimendo quindi che le (u_i) sono soluzioni delle (23) si hanno le equazioni di φ^3. Per ciò porremo

$$\sum_p \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \Psi_{ip} = \mathbf{A}_p , \qquad \sum_p \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \Psi_{ip} = \mathbf{B}_p$$

ed allora alle equazioni $u_{\mathbf{A}} = 0$, $u_{\mathbf{B}} = 0$ aggiungendo le altre

$$u_a = \lambda , \qquad u_b = \mu$$

dove le a, b sono numeri arbitrarî si ha

$$u_i = \lambda (\mathbf{AB}a)_i + \mu (\mathbf{AB}b)_i ,$$

epperò, come ponendo ancora $(\mathbf{AB}a)_i = \mathfrak{a}_i$, $(\mathbf{AB}b)_i = \mathfrak{b}_i$, è

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_i} = \lambda \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathfrak{a}_i} + \mu \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathfrak{b}_i}$$

e quindi

$$\alpha_p (u) = \lambda \alpha_p (\mathfrak{a}) + \mu \alpha_p (\mathfrak{b}) , \qquad \beta_p (u) = \lambda \beta_p (\mathfrak{a}) + \mu \beta_p (\mathfrak{b})$$

si avranno a rappresentare, nel parametro $\lambda : \mu$, la cubica doppia le equazioni:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \left\| \begin{matrix} \lambda\alpha_1(\mathfrak{a}) + \mu\alpha_1(\mathfrak{b}) & \lambda\alpha_2(\mathfrak{a}) + \mu\alpha_2(\mathfrak{b}) & \lambda\alpha_3(\mathfrak{a}) + \mu\alpha_3(\mathfrak{b}) & \lambda\alpha_4(\mathfrak{a}) + \mu\alpha_4(\mathfrak{b}) \\ \lambda\beta_1(\mathfrak{a}) + \mu\beta_1(\mathfrak{b}) & \lambda\beta_2(\mathfrak{a}) + \mu\beta_2(\mathfrak{b}) & \lambda\beta_3(\mathfrak{a}) + \mu\beta_3(\mathfrak{b}) & \lambda\beta_4(\mathfrak{a}) + \mu\beta_4(\mathfrak{b}) \\ \lambda\mathfrak{a}_1 + \mu\mathfrak{b}_1 & \lambda\mathfrak{a}_2 + \mu\mathfrak{b}_2 & \lambda\mathfrak{a}_3 + \mu\mathfrak{b}_3 & \lambda\mathfrak{a}_4 + \mu\mathfrak{b}_4 \end{matrix} \right\| . \quad (^1)$$

(1) Ad una forma analoga a questa, ma anche più simmetrica, si può arrivare usando della cremoniana cubica spaziale individuata dalla rete $(\mathfrak{R}) \equiv \lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0$, e che noi indicheremo col simbolo Cr^3. — Le formule di questa si cavano risolvendo le equazioni:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial y_i} x_i = 0 , \qquad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} x_i = 0 , \qquad \sum \frac{\partial \psi}{\partial y_i} x_i = 0$$

epperò sono le seguenti

$$x_i \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial y} \, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_i \qquad (i = 1, \dots , 4).$$

Ora la cubica φ^3 è la trasformata, mediante Cr^3, della retta b': basterà per ciò esprimere che le y_i soddisfanno alle equazioni

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} y_i = 0 , \qquad \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} y_i = 0$$

con che si ha, individuando due punti distinti di b' con due piani arbitrarî $a_y = 0$, $b_y = 0$:

$$y_i = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \, a \right)_i + \mu \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \, b \right)_i$$

epperò, ponendo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \, a \right)_i = \mathfrak{p}_i , \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \, b \right)_i = \mathfrak{q}_i ,$$

anche

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_i} + \mu \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{q}_i} \quad (\Omega \equiv f, \varphi, \psi ; \ i = 1, \dots , 4).$$

Le formule della rappresentazione parametrica della cubica sono dunque allora

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \left\| \begin{matrix} \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_1} + \mu \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}_1} & \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_2} + \mu \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}_2} & \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_3} + \mu \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}_3} & \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_4} + \mu \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}_4} \\ \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{q}_1} & \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{q}_2} & \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_3} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{q}_3} & \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_4} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{q}_4} \\ \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}_1} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{q}_1} & \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}_2} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{q}_2} & \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}_3} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{q}_3} & \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}_4} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{q}_4} \end{matrix} \right\| .$$

§ II.

Il connesso (2, 3) produttore della superficie.
Un connesso (1, 2).
Due modi diversi d'arrivare all'equazione della superficie.

« 3. Se per mezzo delle equazioni (15) si cavano i valori di $\sigma, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ si ha

$$\sigma : \varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3 = (\eta^{(1)}\, \eta^{(2)}\, \eta^{(3)}\, z) : (\eta^{(2)}\, \eta^{(3)}\, \xi\, z) : (\eta^{(3)}\, \eta^{(1)}\, \xi\, z) : (\eta^{(1)}\, \eta^{(2)}\, \xi\, z) \qquad (25)$$

e quindi l'equazione della rete (16) si potrà porre nella forma

$$(\eta^{(2)}\, \eta^{(3)}\, \xi\, z)\, \mathfrak{J}_1 + (\eta^{(3)}\, \eta^{(1)}\, \xi\, z)\, \mathfrak{J}_2 + (\eta^{(1)}\, \eta^{(2)}\, \xi\, z)\, \mathfrak{J}_3 = 0$$

da che segue, indicando con $\mathfrak{J}_l$ l'invariante simultaneo della retta $\overline{\xi z}$ e della retta $\eta^{(m)}\, \eta^{(n)}$ $(l, m, n = 1, 2, 3)$, l'equazione del connesso piano-retta a cui è riferita la superficie quale superficie polare congiunta nella forma

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & u_1 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & u_2 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & u_3 \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (26)$$

ove si è messo per brevità

$$\mathfrak{J}_1\, \mathfrak{H}_{ik}^{(1)} + \mathfrak{J}_2\, \mathfrak{H}_{ik}^{(2)}\, \mathfrak{J}_3\, \mathfrak{H}_{ik}^{(3)} = H_{ik}\,.$$

« Ne segue, mutando le z_i nelle x_i ed indicando ancora con H_{ik} ciò che diventano per tal mutamento le H_{ik} sopra considerate, che l'equazione della superficie è:

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_3} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_4} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (27)$$

« 4. Se i valori (25) delle $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ si pongono, invece, nella (20), si ha, lasciando invariate le ξ_i, istantaneamente, l'equazione

$$\mathfrak{J}_1\, \mathbf{F}_1 + \mathfrak{J}_2\, \mathbf{F}_2 + \mathfrak{J}_3\, \mathbf{F}_3 = 0 \qquad (28)$$

di un connesso punto-piano (1, 2), di cui si riconosce facilmente essere la superficie Φ_P fondamentale. Segue da ciò che, ponendo

$$\mathfrak{J}_1 \mathbf{F}_{ik}^{(1)} + \mathfrak{J}_2 \mathbf{F}_{ik}^{(2)} + \mathfrak{J}_3 \mathbf{F}_{ik}^{(3)} = \mathrm{T}_{ik}$$

all'equazione della superficie, oltre della (27), si può dare la forma:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} & \mathrm{T}_{13} & \mathrm{T}_{14} & x_1 \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22} & \mathrm{T}_{23} & \mathrm{T}_{24} & x_2 \\ \mathrm{T}_{31} & \mathrm{T}_{32} & \mathrm{T}_{33} & \mathrm{T}_{34} & x_3 \\ \mathrm{T}_{41} & \mathrm{T}_{42} & \mathrm{T}_{43} & \mathrm{T}_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

Si osservi che i due ragionamenti precedenti *sostituiscono* il processo di eliminazione delle λ, μ, dalle (4'). Questo processo, tenuto direttamente senza l'artificio dell'intervento dei connessi (26), (28) conduce generalmente ad un'equazione nella quale si trova incorporato un fattore estraneo alla superficie [1].

[1] Per es., supponendo di prendere per tetraedro di riferimento il tetraedro auto-coniugato del fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$, con che allora si ha $f_{ii} \neq 0$, $f_{ik} = 0$ $(i \neq k)$, $\varphi_{ii} \neq 0$, $\varphi_{ik} = 0$; le equazioni (4') (cfr. Nota prec.) prendono la forma:

$$\nu\xi_1 = (\mathrm{C}_{11}\,\psi_{11} - \tau)\,x_1 + \mathrm{C}_{11}\,(\psi_{12}\,x_2 + \psi_{13}\,x_3 + \psi_{14}\,x_4);$$
$$\nu\xi_2 = (\mathrm{C}_{22}\,\psi_{22} - \tau)\,x_2 + \mathrm{C}_{22}\,(\psi_{11}\,x_1 + \psi_{23}\,x_3 + \psi_{24}\,x_4);$$
$$\nu\xi_3 = (\mathrm{C}_{33}\,\psi_{33} - \tau)\,x_3 + \mathrm{C}_{33}\,(\psi_{31}\,x_1 + \psi_{32}\,x_2 + \psi_{34}\,x_4);$$
$$\nu\xi_4 = (\mathrm{C}_{44}\,\psi_{44} - \tau)\,x_4 + \mathrm{C}_{44}\,(\psi_{41}\,x_1 + \psi_{42}\,x_2 + \psi_{43}\,x_3).$$

Da queste, ponendo $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i} \equiv u_i$, $x_i\,\xi_k - x_k\,\xi_i = p_{ik}$ si ha

$$p_{14}\,(\mathrm{C}_{33}\,\xi_4\,u_3 - \mathrm{C}_{44}\,\xi_3\,u_4) = p_{34}\,(\mathrm{C}_{12}\,\xi_4\,u_1 - \mathrm{C}_{44}\,\xi_1\,u_4);$$
$$p_{24}\,(\mathrm{C}_{33}\,\xi_4\,u_3 - \mathrm{C}_{44}\,\xi_3\,u_4) = p_{34}\,(\mathrm{C}_{22}\,\xi_4\,u_2 - \mathrm{C}_{44}\,\xi_2\,u_4);$$

cosicchè, essendo c_{22}, c_{11} fattori rispettivamente in entrambi i membri della 1ª e 2ª di queste equazioni, ed essendo

$$c_{ii}\,c_{kk} = \lambda^2\,f_{ii}\,f_{kk} + (f_{ii}\,\varphi_{kk} + f_{kk}\,\varphi_{ii})\,\lambda\mu + \varphi_{ii}\,\varphi_{kk}\,.\,\mu^2$$

col porre

$$(g \equiv f, \varphi), \quad \Omega_i\,(g) = p_{i4}\,g_{11}\,(g_{44}\,\xi_4\,u_3 - g_{11}\,\xi_3\,u_4) - p_{34}\,g_{33}\,(g_{44}\,\xi_4\,u_1 - g_4\,\xi_1\,u_4) \quad (i = 1, 2)$$

le due equazioni precedenti possono essere scritte così:

$$\Omega_1(f)\lambda^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1,3,4} f_{ii}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\varphi_{ii}}\,.\,\lambda\mu + \Omega_1(\varphi)\,.\,\mu^2 = 0\,; \quad \Omega_2(f)\,\lambda^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=2,3,4} f_{ii}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\varphi_{ii}}\,\lambda\mu + \Omega_2(\varphi)\,\mu^2 = 0$$

e quindi *un'equazione* cui soddisfanno le coordinate dei punti della superficie è

$$\left[\Omega_1(f)\,\Sigma f_{ii}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\varphi_{ii}} - \Omega_2(f)\,\Sigma f_{ii}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\varphi_{ii}}\right]\left[\Omega_1(\varphi)\,\Sigma f_{ii}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\varphi_{ii}} - \Omega_2(\varphi)\,\Sigma f_{ii}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\varphi_{ii}}\right]$$
$$-\Big[\Omega_1(f)\,\Omega_2(\varphi) - \Omega_2(f)\,\Omega_1(\varphi)\Big]^2 = 0.$$

« Si osservi inoltre che, detto **H** il determinante delle H_{ik} nella (27), e **T** quello delle T_{ik} nella (29) si hanno le relazioni:

$$\sum_{ik} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{H}_{ik}} \psi_{ip}\, \psi_{kq} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{T}_{pq}} \qquad (p, q = 1, \dots, 4).$$

« 5. Se a coordinate del punto P_i nel quale la retta p di ξ_i taglia il piano $\overline{\eta^{(1)}\eta^{(2)}\eta^{(3)}}$ si prendono le x_1, x_2, x_3, o, il che fa lo stesso, gli invarianti $\mathfrak{J}_l\ (l = 1, 2, 3)$, le coordinate dei punti nei quali p taglia ulteriormente la superficie Φ_p saranno date dalle (15) quando σ sia determinato per mezzo dell'equazione

$$\sum_{ik} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{T}_{ik}} (\sigma\xi_i + \eta_i)(\sigma\xi_k + \eta_k) = 0,]$$

cioè, ponendo

$$\sum_{ik} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{T}_{ik}} \nu_i \nu_k = \mathrm{N}\ (\nu \equiv \xi, \eta\ ;\ \mathrm{N} \equiv \mathrm{A}, \mathrm{C})\,,\quad \mathrm{B} = \sum_1^4 \xi_i \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \eta_i}$$

dall'equazione:

$$\mathrm{A}\sigma^2 + 2\mathrm{B}\sigma + \mathrm{C} = 0.$$

« Le coordinate dei punti in quistione saranno quindi espresse così:

$$z_i \equiv (-\mathrm{B} \pm \sqrt{\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}})\,\xi_i + \mathrm{A}\eta_i \qquad (i = 1, \dots, 4)$$

e queste formule *eseguiscono* la proiezione stereografica della superficie dal suo punto triplo sul piano η.

« Le immagini delle sezioni piane saranno date nei parametri $a_i\,(i=2, \dots, 4)$ dall'equazione

$$(\mathrm{B}a_\xi - \mathrm{A}a_\eta)^2 = (\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC})\,a_\xi^2$$

ovvero, sopprimendo il fattore $\mathrm{A} = 0$ che rappresenta l'immagine delle proiezioni eseguite con le rette del cono tangente nel punto triplo, dall'equazione

$$\mathrm{A}a_\eta^2 - 2\mathrm{B}a_\eta a_\xi + \mathrm{C}a_\xi^2 = 0.$$

« Questa mostra che, ponendo $\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = \Delta$, le equazioni in coordinate a_i dei due punti della superficie immagini del punto (x_1, x_2, x_3) di η, sono

$$\mathrm{A}a_\eta - \mathrm{B}a_\xi + \sqrt{\Delta}\,.\,a_\xi = 0$$
$$\mathrm{A}a_\eta - \mathrm{A}a_\xi - \sqrt{\Delta}\,.\,a_\xi = 0$$

e perciò essi sono armonici rispetto ad $a_\xi = 0$ ed $\mathrm{A}a_\eta - \mathrm{B}a_\xi = 0$. Quest'ultimo punto sta dunque sulla superficie del 4° ordine Φ'_p prima polare del punto triplo rispetto a Φ_p, e noi troviamo così nel modo più spontaneo che la rappresentazione parametrica di essa è data dalle formule

$$z_i \equiv \mathrm{A}\eta_i - \mathrm{B}\xi_i \qquad (i = 1, \dots, 4).$$

« Da queste si vede che le proiezioni stereografiche delle diverse sezioni piane hanno a comune i punti $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$, e che quindi la s u p e r f i c i e d e l 4° o r d i n e i n q u i s t i o n e p o s s i e d e 12 r e t t e p e l p u n t o. Di queste 4 sono le a_k: le altre 8, che diremo $b_k\ (k = 1, \dots, 8)$ essendo tali che ogni loro punto è coniugato armonico di ξ_i rispetto agli ulteriori punti in cui esse tagliano Φ_P sono rette tangenti cinque-punto di questa superficie; epperò ne concludiamo che *fra le rette tangenti nel punto triplo alla superficie Φ_P ve ne sono otto che hanno in esso un contatto cinque-punto*. Del resto, questo fatto risulta anche da che, essendo l'ulteriore sezione di C_P con Φ_P, oltre di quella data dalle a_k una curva dell'11° ordine; questa, giacendo sopra un cono del 3° ordine, dovrà passare con 8 rami per P; e le tangenti in questi rami sono precisamente le rette b_k.

« 6. È da osservarsi che ogni equazione $\mathfrak{G}(x_1, x_2, x_3) = 0$ di una curva nel piano η, per mezzo della sostituzione $\frac{x_1}{\mathfrak{J}_1} \frac{x_2}{\mathfrak{J}_2} \frac{x_3}{\mathfrak{J}_3}$ si muta nell'equazione $\mathfrak{G}(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3) = 0$ del cono che dal punto triplo proietta quella curva; è così, p. e., che, immaginando effettuata tale sostituzione in A, si ha in $A = 0$ l'equazione del cono tangente nel punto triplo, ecc. ».

Fisica. — *Sulle tensioni di vapore delle soluzioni di zolfo e di fosforo nel solfuro di carbonio*. Nota di G. Guglielmo [1], presentata dal Socio Blaserna.

« In una serie di esperienze sulla tensione dei vapori nel vuoto e nei gaz (delle quali spero poter fra breve pubblicare i risultati) ho usato come liquido che forniva il vapore soluzioni di zolfo nel solfuro di carbonio, collo scopo d'impedire le perturbazioni prodotte dal condensarsi del vapore sulle pareti [2].

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto fisico dell'Università di Sassari.

(2) È noto che Regnault attribuì a questo fatto le differenze, talora non piccole, tra la tensione massima del vapore d'un corpo nel vuoto e nei gaz. Egli riteneva che, per effetto d'una adesione fra le pareti ed il vapore, questo si liquefacesse e ne conseguisse una diminuzione della tensione; d'altra parte il liquido formatosi, scorrendo lungo le pareti per effetto della gravità, lasciasse queste in condizione da poter continuare a produrre l'effetto indicato. Tale spiegazione è evidentemente inesatta, giacchè supporrebbe la possibilità del moto perpetuo e di un trasporto di calore dal liquido dove avverrebbe l'evaporazione e quindi la temperatura sarebbe un po' al disotto di quella dell'ambiente, alle pareti dove avverrebbe liquefazione e quindi la temperatura sarebbe un po' superiore a quella dell'ambiente, e ciò con produzione di energia. D'altra parte nel 1887 dimostrai con esperienze decisive che la spiegazione data da Regnault non basta a spiegare le differenze da lui osservate.

Ciò non toglie però che la liquefazione del vapore sulle pareti non sia dannosa, poichè per causa delle impurità, variamente volatili, della sostanza la parte che se ne condensa sulle pareti ha la composizione e quindi la tensione sensibilmente diversa dal resto, e l'omogeneità assoluta non si ristabilisce che lentamente.