ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 20 novembre 1892.

Matematica. — *Gli integrali algebrici dell'equazione di Lamé.* Nota del Socio FRANCESCO BRIOSCHI.

« 1. In una Memoria che ha per titolo *Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine* pubblicata negli Annali di Matematica (T. IX seconda Serie. Anno 1878) ho dimostrato che la equazione differenziale:

$$\varphi(s)\frac{d^2y}{ds^2}+\tfrac{1}{2}\varphi'(s)\frac{dy}{ds}=\left[\frac{\nu(\nu+2)}{4}s+t\right]y \tag{1}$$

nella quale:

$$\varphi(s)=4s^3-g_2s-g_3=4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)$$

ν un numero dispari e t una costante, ammette integrali algebrici.

« Indicando con $P(s)$ un polinomio del grado $\frac{\nu-1}{2}$ e con ξ una qualsivoglia delle radici e_1, e_2, e_3, ponendo:

$$P(s)=\prod_1^{\frac{\nu-1}{2}}(s-s_r),\quad \mu(s)=\frac{\varphi(s)}{s-\xi}$$

e:

$$t_1(a)=\sqrt{\mu(s)}-\sqrt{\mu(a)}-2(s-a), \tag{2}$$
$$t_2(a)=\sqrt{\mu(s)}+\sqrt{\mu(a)}-2(s-a)$$

ho anche dimostrato che i valori degli integrali y_1, y_2 della equazione (1) sono:

$$y_1 = \sqrt{P(s)}\,(s-\xi)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{t_1(\xi)}{t_2(\xi)}\right]^{\frac{1}{4}} \prod_1^{\frac{\nu-1}{2}} \left[\frac{t_1(s_r)}{t_2(s_r)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$y_2 = \sqrt{P(s)}\,(s-\xi)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{t_2(\xi)}{t_1(\xi)}\right]^{\frac{1}{4}} \prod_1^{\frac{\nu-1}{2}} \left[\frac{t_2(s_r)}{t_1(s_r)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ponendo $a = \xi$ ed $a = s_r$ nelle espressioni (2).

« Questi valori di y_1, y_2 si ponno trasformare nel modo seguente. Essendo:

$$t_1(a)\,t_2(a) = 4(s-a)\left[2s+\xi-\sqrt{\mu(s)}\right]$$

si hanno le:

$$t_2(a)\left[t_1(a)+4(s-a)\right] = 4(s-a)\left[2a+\xi+\sqrt{\mu(a)}\right]$$
$$t_1(a)\left[t_2(a)+4(s-a)\right] = 4(s-a)\left[2a+\xi-\sqrt{\mu(a)}\right]$$

inoltre le:

$$t_1(a)\left[t_1(a)+4(s-a)\right] = L(a), \quad t_2(a)\left[t_2(a)+4(s-a)\right] = M(a)$$

posto:

$$L(a) = \left[\sqrt{\mu(s)}-\sqrt{\mu(a)}\right]^2 - 4(s-a)^2$$
$$M(a) = \left[\sqrt{\mu(s)}+\sqrt{\mu(a)}\right]^2 - 4(s-a)^2.$$

« Si ottengono così le due relazioni:

$$4(s-a)\left[2a+\xi+\sqrt{\mu(a)}\right]\frac{t_1(a)}{t_2(a)} = L(a)$$

$$4(s-a)\left[2a+\xi-\sqrt{\mu(a)}\right]\frac{t_2(a)}{t_1(a)} = M(a)$$

e per esse i valori di y_1, y_2, trascurando un coefficiente costante, prendono la forma:

$$y_1 = L^{\frac{1}{4}}(\xi) \prod_1^{\frac{\nu-1}{2}} L^{\frac{1}{2}}(s_r)$$

(3)

$$y_2 = M^{\frac{1}{4}}(\xi) \prod_1^{\frac{\nu-1}{2}} M^{\frac{1}{2}}(s_r).$$

« Si noti che posto:

$$A_r = \sqrt{\mu(s_r)}-\sqrt{\mu(\xi)}, \quad B_r = 2(s_r-\xi), \quad C_r = \sqrt{\mu(s_r)}+\sqrt{\mu(\xi)}$$
$$A = \sqrt{\mu(s)}-\sqrt{\mu(\xi)}, \quad B = 2(s-\xi), \quad C = \sqrt{\mu(s)}+\sqrt{\mu(\xi)}$$

e quindi:

$$L(\xi) = A^2 - B^2, \quad M(\xi) = C^2 - B^2$$

sono:

$$L(s_r) = (A - A_r)^2 - (B - B_r)^2, \quad M(s_r) = (C + A_r)^2 - (B - B_r)^2.$$

« 2.° I valori (3) possono essere nuovamente trasformati colle seguenti considerazioni. Sia $F(z_1, z_2)$ la forma biquadratica:

$$F(z_1, z_2) = z_1^4 - 6\varrho z_1^2 z_2^2 + z_2^4;$$

indicando con:

$$H = \tfrac{1}{2}(FF)_2 \qquad T = 2(FH)$$

i suoi due covarianti, si hanno pei loro valori:

$$H = -\varrho F - (9\varrho^2 - 1) z_1^2 z_2^2 \qquad T = (9\varrho^2 - 1) z_1 z_2 (z_2^4 - z_1^4).$$

« Supponendo nelle formule del paragrafo precedente $\xi = e_1$ pongasi $\varrho = \dfrac{e_1}{e_2 - e_3}$, ed [1]

$$s = -(e_2 - e_3)\frac{H}{F} \tag{4}$$

si ottengono le:

$$s - e_1 = \frac{\mu(e_1)}{e_2 - e_3}\frac{z_1^2 z_2^2}{F}, \quad s - e_2 = \frac{e_1 - e_2}{F}(z_1^2 + z_2^2)^2, \quad s - e_3 = \frac{e_1 - e_3}{F}(z_2^2 - z_1^2)^2$$

e quindi:

$$\sqrt{\mu(s)} = \frac{\sqrt{\mu(e)}}{F}(z_2^4 - z_1^4).$$

« I valori di $L(\xi)$, $M(\xi)$, $L(s_r)$, $M(s_r)$, si trasformano così nei seguenti:

$$L(\xi) = 4\mu(e_1)\frac{z_1^4}{F} \qquad M(\xi) = 4\mu(e_1)\frac{z_2^4}{F}$$

$$L(s_r) = \frac{1}{F}\left[(C_r^2 - B_r^2)^{\frac{1}{2}} z_1^2 - (A_r^2 - B_r^2)^{\frac{1}{2}} z_2^2\right]^2$$

$$M(s_r) = \frac{1}{F}\left[(A_r^2 - B_r^2)^{\frac{1}{2}} z_1^2 - (C_r^2 - B_r^2)^{\frac{1}{2}} z_2^2\right]^2$$

e gli integrali y_1, y_2 diventano:

$$y_1 = \frac{U}{F^{\frac{\nu}{4}}} \qquad y_2 = \frac{V}{F^{\frac{\nu}{4}}} \tag{5}$$

essendo:

$$U = z_1 S(z_1^2, z_2^2), \qquad V = z_2 S(z_2^2, z_1^2)$$

ed S un polimonio in z_1^2, z_2^2 del grado $\dfrac{\nu - 1}{2}$ [2]. I coefficienti delle più

[1] Pick, *Ueber die Integration der Lamé'schen Differential gleichung.* Accademia delle scienze di Vienna. Anno 1887.

[2] Alphen, *Traité des fonctions elliptiques.* T. II, pag. 474.

alte potenze di z_1^2 in U e di z_2^2 in V potendo ritenersi eguali all'unità, i polinomi U, V contengono ciascuno gli stessi coefficienti in numero $\frac{\nu-1}{2}$.

3. Per determinare il valore di questi coefficienti si osservi che posto $z=\frac{z_1}{z_2}$ dalla relazione (4) si ha:

$$ds = 2(e_2-e_3)\frac{T}{F^2}dz$$

ma pel valore di T:

$$\frac{T}{F^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\varphi(s)}}{(e_2-e_3)^{\frac{3}{2}}}$$

quindi:

$$\frac{ds}{dz} = \frac{2}{(e_2-e_3)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sqrt{\varphi(s)}}{\sqrt{F}}$$

Dalla prima delle (5) derivando si deduce la:

$$\frac{2\sqrt{\varphi(s)}}{(e_2-e_3)^{\frac{1}{2}}}\frac{dy_1}{ds} = \frac{FU' - \frac{\nu}{4}F'U}{F^{\frac{\nu+2}{4}}}$$

e derivando di nuovo:

$$\frac{4}{e_2-e_3}\left[\varphi(s)\frac{d^2y_1}{ds^2} + \tfrac{1}{2}\varphi'(s)\frac{dy_1}{ds}\right] = \frac{1}{F^{\frac{\nu}{4}+1}}\left[F^2U'' - \frac{\nu-1}{2}FF'U' - \right.$$
$$\left. - \frac{\nu}{4}FF''U + \frac{\nu(\nu+2)}{16}F'^2U\right]$$

ma

$$U' = \nu U_1 \qquad U'' = \nu(\nu-1)U_2, \qquad F' = 4F_1 \qquad F'' = 12F_2,$$

si avrà perciò: per la (1)

$$\frac{4}{e_2-e_3}\left[\frac{\nu(\nu+2)}{4}s + t\right]y_1 = \frac{\nu(\nu-1)}{F^{\frac{\nu}{4}}}(FU)_2 - \nu(\nu+2)\frac{H}{F}y_1$$

o rammentando il valore (4) di s, si avrà:

$$(FU)_2 = \frac{4t}{\nu(\nu-1)(e_2-e_3)}U$$

ossia:

$$z_1^2U_{22} + 6\varrho z_1z_2U_{12} + z_2^2U_{11} = kU$$

posto:

$$k = \varrho + \frac{4t}{\nu(\nu-1)(e_2-e_3)}.$$

« Da quest'ultima equazione si ottengono i valori dei coefficienti di U e quello di k; quest'ultimo sarà dato evidentemente da una equazione del grado $\frac{\nu+1}{2}$.

« Pei casi di $\nu = 1, 3, 5$ si avranno:

$$t = 0 \qquad t^2 = \tfrac{3}{4} g_2 , \qquad t^3 - 7 g_2 t + 20 g_3 = 0 .$$

« 4.° Una speciale proprietà degli integrali y_1, y_2 dell'equazione differenziale (1) rilevasi dalle seguenti considerazioni. Sia $f(y_1, y_2)$ una forma biquadratica a coefficienti costanti, e supposto sostituiti in essa per y_1, y_2 i loro valori, sarà:

$$f(y_1, y_2) = z(s)$$

essendo z un polinomio in s, il quale, come è noto, deve soddisfare ad una equazione differenziale lineare del quinto ordine. Questa equazione è la seguente:

$$\varphi^2 z^{\mathrm{v}} + 5 \varphi \varphi' z^{\mathrm{IV}} + 5 \left[\tfrac{3}{4} \varphi'^2 + 4 (6s - \psi) \varphi \right] z''' +$$
$$+ 5 \left[6 (2 - \psi') \varphi + 6 (3s - \psi) \varphi' \right] z'' +$$
$$+ \left[6 (3 - 4\psi') \varphi' + 48 s (3s - 5\psi) + 64 \psi^2 \right] z' + 16 \psi' (4\psi - 3s) z = 0$$

nella quale:

$$\psi = \frac{\nu(\nu+2)}{4} s + t.$$

« Posto:

$$z = s^{\frac{\nu-1}{2}} + a_1 s^{\frac{\nu-3}{2}} + \cdots + a_{\frac{\nu-1}{2}}$$

la equazione superiore dà $\frac{\nu+3}{2}$ relazioni, ma il coefficiente della più alta potenza di s essendo eguale a zero riduconsi a $\frac{\nu+1}{2}$, cioè sufficienti a determinare i valori di $a_1, a_2 \ldots a_{\frac{\nu-1}{2}}$ e di t.

« Per $\nu = 1$ si ha $z = 1$, $t = 0$; per $\nu = 2$ si ha $z = s - \frac{2}{3} t$, e $t^2 = \frac{3}{4} g_2$; per $\nu = 3$ si ottiene $z = s^2 - \frac{5}{16} t s + \frac{1}{320} (23 t^2 - 81 g_2)$ e $t^3 - 7 g_2 t + 20 g_3 = 0$ ».