ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

lavori notarono il Berthelot e il Menschutkin, che non sembra troppo in armonia colle leggi del Berthollet;

« 2.° di aver mostrato che il comportamento ottico dell'acetato e in genere dei sali di nicotina è assai diverso in soluzione acquosa e in soluzione alcoolica o benzolica ed inoltre che le equazioni stabilite per esprimere il potere rotatorio dei sali di nicotina in soluzione acquosa in funzione della concentrazione non hanno più valore per soluzioni molto concentrate;

« 3.° che con tutta probabilità la nicotina e basi analoghe nell'acqua acquistano proprietà alcaline più energiche formandosi degli idrati e che i sali che si formano in soluzione acquosa sono i sali di queste basi idrate più energiche, mentre negli altri solventi si formano più o meno completamente i sali delle basi anidre ».

Matematica. — *Altre proprietà relative alla superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

« In questa Nota, prendendo argomento dalle proprietà della superficie del 5° ordine sviluppate in due Note precedenti (1), e dalla rappresentazione piana della medesima, io mi occupo della costruzione di essa per mezzo di ciascuna di undici corrispondenze univoche, distinte in due sistemi, l'uno di sette, l'altro di quattro, aventi caratteri diversi, e della costruzione di undici corrispondenti connessi rispetto a ciascuno dei quali, e rispetto ad una quadrica fissa, può provenire al modo delle superficie polari congiunte. Mi occupo pure di qualche quistione più generale.

I.

Cenno intorno alla rappresentazione piana.

« 1. La proiezione sghemba della superficie, fatta mediante le corde della sua curva doppia sul piano η, seguita da una trasformazione quadratica arbitraria $\mathfrak{T}$ coi punti fondamentali in $\eta \cdot \varphi^3 \equiv 1, 2, 3$ fornisce la rappresentazione piana di ordine minimo della superficie. Posto $\mathfrak{T}[\eta . a_k, b] \equiv A_k, B$ $(k = 1, \ldots, 4)$ le sezioni piane vengono rappresentate da curve del 4° ordine pei punti A_k, B con soltanto cinque intersezioni mobili, epperò con 6 altri punti fissi che diremo B_k $(k = 1, \ldots, 6)$. Ciascuno di questi rappresenta una retta della superficie, distinta dalle a_k, b; *sulla superficie vi sono quindi altre sei rette* $b_1, \ldots, b_6$ *tutte corde della curva doppia* (2) e tagliate dal

(1) Cfr. questi Rend., fascicoli settembre 1892.

(2) Cfr. per la rappresentazione piana della sup. del 5° ordine con cubica doppia: Clebsh, Math. Ann. III; e poi Cremona, Math. Ann. IV; Caporali, Memorie di Geometria.

piano η nei punti $\mathfrak{T}^{-1}[B_k] \equiv B'_k$. — Fra i punti fondamentali i quattro A_k sono allineati, e *la retta a*, che li contiene, *è l'immagine del punto triplo*; poichè i punti $\eta . a_k$ da cui provengono gli A_k per mezzo di $\mathfrak{T}$ sono in una conica che passa per 1, 2, 3, cioè sulla conica $\eta . (P)$. Si possono subito dedurre da ciò moltissime proprietà delle curve situate sulla superficie; noi ci limitiamo a far cenno di quelle soltanto che interessano al nostro scopo. Dicendo B_7, b_7 rispettivamente in luogo di B, b, si ha che una retta arbitrariamente condotta per B_k è rappresentata da una cubica sghemba che passa pel punto triplo e che è appoggiata in un punto alla retta b_k ed in nessun punto alla retta b_i $(i,k = 1, \ldots, 7;\ i \neq k)$; una retta condotta per A_k ha, in vece, per immagine una cubica che incontra la retta a_k, ma che in generale non passa pel punto triplo. Diremo (b_k) i *primi sette* e (a_k) i *secondi quattro* fra gli undici sistemi di cubiche che così si hanno; e diremo $(\mathbf{h}_i)$ *il sistema coordinato* alla retta $\mathbf{h}_i$ $(\mathbf{h} \equiv b, a)$.

2. Fra le cubiche del sistema (b_i) vi sono 6 coniche, ciascuna delle quali è appoggiata oltre che a b_i anche ad una retta b_l $(l \neq i)$, e passa pel punto triplo; e 4 coniche appoggiate oltre che a b_i anche ad una retta a_k senza generalmente passare pel punto triplo. Fra le cubiche del sistema (a_i) vi sono poi 7 coniche, ciascuna appoggiata oltre che ad a_i anche ad una b_k. S i h a n n o c o s ì 49 c o n i c h e s u l l a s u p e r f i c i e, e di esse 21 s o l t a n t o p a s s a n o p e l p u n t o t r i p l o; si possono immaginare rappresentate coi simboli

$$(ba)_{lm} \begin{cases} l = 1, \ldots, 7 \\ m = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$

$$b^2_{lm}\ (lm = 12, \ldots, 17;\ 23, \ldots, 27;\ \ldots;\ 67).$$

Corrispondentemente a queste coniche l a s u p e r f i c i e p o s s i e d e 21 c u b i c h e p i a n e c o n u n p u n t o d o p p i o n e l p u n t o t r i p l o; e sono quelle che insieme alle 21 coniche precedenti completano la sezione dei piani di queste colla superficie. Sul piano rappresentativo hanno per immagini le coniche condotte per 5 dei 7 punti B_k. Ognuna di tali cubiche è appoggiata a cinque delle rette b_i, e si può indicare con b^3_{lm} quella appoggiata alle cinque rette b_i $(i \neq l, m)$. Si ha pure che b^3_{lm} è appoggiata in due punti a ciascuna delle coniche b^2_{lm}, $(ba)_{lk}$, $(ba)_{mk}$ $(k = 1, \ldots, 4)$ ed in nessun punto alla conica b^2_{pq} $(p, q \neq l, m)$.

II

Undici modi diversi di generare la superficie per corrispondenze (1, 1).

3. Se per la retta $\mathbf{h}_k$ $(\mathbf{h} = b, a)$, e per la cubica φ^3 si fa passare una quadrica, questa, avendo a comune colla superficie la curva $2\varphi^3 + \mathbf{h}_k$, avrà ulteriormente a comune una cubica sghemba che passa pel punto triplo se è $\mathbf{h} \equiv b$, e che è appoggiata in un punto alla $\mathbf{h}_k$. Tal cubica appartiene

perciò al sistema $(\mathbf{h}_k)$, e si può quindi dire: Le cubiche degli 11 sistemi $(\mathbf{h}_k)$ sono le cubiche che le quadriche dei fasci

$$(\varphi^3 + \mathbf{h}_k) \quad \mathbf{h} \equiv \begin{cases} b\,;\ k = 1\,, \ldots\,, 7 \\ a\,;\ k = 1\,, \ldots\,, 4 \end{cases}$$

hanno ulteriormente a comune colla superficie.

« Da ciò segue allora che una qualunque delle cubiche dei primi 7 sistemi si appoggia, oltre che nel punto triplo, in altri 4 punti alla cubica doppia; mentre che le cubiche degli altri 4 sistemi si appoggiano a questa curva in 5 punti, distinti dal punto triplo.

« 4. Consideriamo uno $(\varphi^3 + b_k)$ dei primi 7 fasci, ed in questo una quadrica $F_k{}^2$ e la corrispondente cubica $f_k{}^3$. Proiettando $f_k{}^3$ da P si ha un cono quadrico $P_k{}^2$, il quale ha ulteriormente a comune con $F_k{}^2$ una retta uscente da P, e precisamente quella k di $F_k{}^2$ che appartiene al sistema opposto a quello cui appartiene b_k. Di coni $P_k{}^2$ ve ne sono tanti quante sono le quadriche $F_k{}^2$: è facile però di riconoscere che tutti questi coni sono in un sistema di indice h, dove h è la soluzione dell'equazione $2h - \sigma = 3$, σ essendo l'ordine del luogo descritto dalla retta k. In fatti, prendendo un punto M su una retta arbitraria r, per esso passano h coni del sistema, epperò si hanno altrettante quadriche corrispondenti $F_k{}^2$, e quindi anche altrettante coppie di punti $M_1 M'_1, \ldots, M_h M'_h$ su r. Viceversa, dato un punto di una di queste coppie, per esso passa una sola quadrica $F_k{}^2$, epperò si ha corrispondentemente un sol cono del sistema ed una sola coppia di punti MM'. Su r si ha dunque una corrispondenza $(2, 2h)$ i cui punti uniti sono quelli in cui r taglia la superficie, ed anche, fra essi, quelli in cui r taglia il luogo delle rette k; ma la superficie è del 5° ordine, dunque si deve avere

$$2 + 2h - \sigma = 5\,,$$

cioè precisamente $2h - \sigma = 3$. Ora il luogo delle rette k è il piano Pb_k, perchè b_k sta su tutte le $F_k{}^2$ del fascio; perciò è $\sigma = 1$, e quindi $h = 2$. Supponendo che k percorra i numeri $1\,, \ldots\,, 7$ si ha il risultato seguente:

« Vi sono sette modi diversi di generare la superficie per mezzo di un fascio di quadriche con base decomposta ed un sistema, d'indice 2, di coni quadratici in corrispondenza univoca.

« 5. Consideriamo ora una $(\varphi^3 + a_k)$ degli altri 4 fasci di cui sopra, ed in esso una quadrica $F_k{}^2$; consideriamo la cubica $f_k{}^3$ ulteriore sezione di $F_k{}^2$ colla superficie ed il cono cubico $P_k{}^3$ (razionale) che la proietta da P. Al variare di $F_k{}^2$ questo cono cubico descrive un sistema d'indice 2, poichè, ragionando come nel numero 4, su una retta arbitraria r, si viene ad avere una corrispondenza $(3, 2h)$ i cui punti uniti sono i punti d'incontro di r con la superficie, e col luogo, contato due volte, delle generatrici doppie dei coni P_k^3. Ora questo luogo è il piano di a_k e della tangente a φ^3 in P; quindi h, indice del sistema descritto da P_k^3, deve soddisfare all'equazione

$$3 + 2h - 2 = 5\,,$$

epperò deve essere $h = 2$. Facendo $k = 1, \ldots, 4$ si ha quest'altro risultato:

« Vi sono 4 modi diversi di generare la superficie per mezzo di un fascio di quadriche con base decomposta, ed un sistema, d'indice 2, di coni cubici razionali in corrispondenza univoca.

« 6. I due teoremi precedenti mostrano che la superficie Φ_P si presenta come caso di degenerazione delle superficie del 6° e del 7° ordine, le cui equazioni vengono formate come segue.

« Si dicano

$$\varphi_1(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3) = 0\,, \quad \varphi_2(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3) = 0\,, \quad \varphi_3(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3) = 0$$

tre forme arbitrarie di grado $\mathbf{i}\,(= 2, 3)$ negli invarianti $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$ ed

$$f_1(x_1, \ldots, x_4) = 0\,, \quad f_2(x_1, \ldots, x_4) = 0$$

due forme quadratiche arbitrarie nelle coordinate $x_1, \ldots, x_4$ di un punto. Si formi il sistema, d'indice 2,

$$\lambda^2 . \varphi_1 + 2\lambda\mu . \varphi_2 + \mu^2 . \varphi_3 = 0 \qquad (\alpha)$$

ed il fascio

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = 0\,; \qquad (\beta)$$

per eliminazione del parametro $\lambda : \mu$ si ha l'equazione

$$\varphi_1 . f_2^2 - 2\varphi_2 . f_1 f_2 + \varphi_3 . f_1^2 = 0 \qquad (\gamma)$$

che rappresenta, quando si tengono ferme le ξ_i e si identificano le variabili che entrano nelle $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$ con le $x_1, \ldots, x_4$, una superficie dell'ordine $\mathbf{i} + 2.2 = \mathbf{i} + 4\,(= 6, 7)$ con la quartica doppia $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ e col punto $\mathbf{i}^{plo}$ in ξ.

« Se nell'equazione (γ) si mantengono ferme le ξ dopo averle scambiate con le x, si avrà l'equazione del cono tangente nel punto $\mathbf{i}^{plo}$. Se dunque le ξ si considerano come variabili, la (γ) dà insiememente un sistema di superficie dell'ordine $\mathbf{i} + 4$ e di coni d'ordine $\mathbf{i}$, che sono fra loro nelle stesse relazioni in cui si trovano le superficie polari congiunte ed i coni polari congiunti. Possiamo mostrare che una tale relazione non è soltanto apparente poichè ha luogo il teorema: Le superficie date dalla (γ) quando si mantengono fisse le ξ e variabili le x, ed i coni dati dalla medesima equazione, quando sono, in vece, fisse le x e variabili le ξ, sono superficie polari congiunte e coni congiunti rispetto ad un connesso $(\mathbf{i}, 4)$ e ad una quadrica.

« In fatti, ricordando le espressioni di $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$ e ponendo $p_{ik}=\xi_i x_k - \xi_k x_i$ $(ik = 12, \dots, 34)$ si ha:

$$\mathfrak{J}_1 = \sum (\eta^{(2)} \eta^{(3)})_{lm} p_{ik}, \ \mathfrak{J}_2 = \sum (\eta^{(3)} \eta^{(2)})_{lm} p_{ik}, \ \mathfrak{J}_3 = \sum (\eta^{(1)} \eta^{(2)})_{lm} p_{ik}; \quad (\delta)$$

cosicchè, mutando in (γ) le x_i per mezzo della corrispondenza polare rispetto a

$$\sum_1^4 x_i^2 = 0 \qquad (\varepsilon)$$

dopo di che diremo f_1', f_2' ciò che diventano f_1, f_2; e facendo nelle $\varphi_i (i=1,2,3)$ le sostituzioni (δ), dopo di che le diremo φ'_i, noi avremo l'equazione

$$\varphi'_1 f_2'^2 - 2\varphi'_2 f_1' f_2' + \varphi'_3 f_1'^2 = 0 \qquad (\gamma')$$

di un connesso piano-retta $(\mathbf{i}, 4)$ che insieme alla quadrica (ε) risponde all'asserto.

III.

Undici connessi rispetto a cui Φ_P proviene come superficie polare congiunta.

« 8. L'equazione (γ) diventa quella di una superficie come la Φ_P se la quartica $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ si scinde in una cubica φ^3 ed in una corda h di questa; e poi se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1° per $\mathbf{i} = 2$ il punto ξ deve essere su φ^3 senza essere su h, e poi la generatrice della quadrica $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ di sistema opposto a quello cui appartiene h, e che passa per ξ, deve essere pure generatrice del cono $\lambda^2 \varphi_1 + 2\gamma\mu\varphi_2 + \mu^2 \varphi_3 = 0$; e ciò qualunque sia $\lambda : \mu$. Allora il primo membro della (γ) sarà divisibile per $(\xi h^{(1)} h^{(2)} x)$, dove $h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$ $(i = 1, \dots, 4)$ sono ordinatamente le coordinate dei due punti $h.\varphi^3 \equiv H_1, H_2$; ed il quoziente uguagliato a zero sarà precisamente l'equazione di una superficie come la Φ_P;

2° per $\mathbf{i} = 3$, il punto ξ deve essere uno dei punti H_1, H_2, ed inoltre le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ devono essere scelte per modo, che detta t la tangente a φ^3 in ξ e $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$ i valori che $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$ acquistano per essa si abbia contemporaneamente

$$f_2^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{J}_j} - 2 f_1 f_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathfrak{J}_j} + f_2^2 . \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mathfrak{J}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{J}_1 & \mathfrak{J}_2 & \mathfrak{J}_3 \\ \mathfrak{T}_1 & \mathfrak{T}_2 & \mathfrak{T}_3 \\ \mathfrak{H}_1 & \mathfrak{H}_2 & \mathfrak{H}_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\mu)$$

ove è $\mathfrak{H}_l$ il valore che prende per h l'invariante $\mathfrak{J}_l$. Allora l'equazione (γ) si scinderà nella equazione (μ), contata due volte, ed in una equazione residuale che sarà quella di una superficie come la Φ_P.

« Avvicinando questi risultati a quello stabilito nel n. 7 noi dunque possiamo dire, per la superficie Φ_P, che

« Vi sono sette enti connessi (2, 3) e quattro enti connessi (3, 2) rispetto a ciascuno dei quali e rispetto alla quadrica $\sum_1^4 x_i^2 = 0$ la superficie Φ_P può provenire come superficie polare congiunta.

« Rispetto a ciascuno dei 4 connessi (3, 2) il punto ξ è singolare pel complesso quadratico del connesso che corrisponde al piano polare di ξ rispetto a $\sum_1^4 x_i^2 = 0$.

« 9. È ad osservarsi che nel teorema precedente si parla di enti connessi distinti nel senso che non soltanto non si può con una trasformazione unica di variabili passare dall'uno all'altro, *conservando la superficie*, ma neppure con una sola trasformazione eseguita sulle variabili u_i. Usando di questa si possono ottenere una infinità di connessi rispondenti allo scopo. Se, nel fatto, nella (γ), p. e., si rimpiazzano le x_i delle f_i per mezzo della sostituzione $x_i \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial u_i}$, dove $\Psi = 0$ è la forma aggiunta di una forma quadratica arbitraria nelle x, $\psi = 0$, si avrà il connesso

$$\varphi'_1 \left(\sum \frac{\partial f_1}{\partial \mu_i} \mu_i \right)^2 - 2\varphi'_2 \sum \frac{\partial f_1}{\partial \mu_i} \mu_i \cdot \sum \frac{\partial f_2}{\partial \mu_i} \mu_i + \varphi'_3 \left(\sum \frac{\partial f_2}{\partial \mu_i} \mu_i \right)^2 = 0$$

$$\mu_i = \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

rispetto al quale, ed anche rispetto a $\psi = 0$, se si precede la superficie polare congiunta, siccome si dovrà sulla precedente equazione rifare la sostituzione $x_i \equiv \frac{\partial \psi}{\partial u_i}$ si ritornerà sulla stessa (γ'), a meno di una potenza del determinante $[\psi_{ik}]$ fattore in tutti i termini dell'equazione [1] ».

Geologia. — *Avanzi morenici di un antico ghiacciaio del monte Sirino nei dintorni di Lagonegro (Basilicata).* Nota di GIUSEPPE DE LORENZO, presentata dal Corrispondente FR. BASSANI.

« Nel 1872 Stoppani scopriva la morena della valle d'Arni e ne faceva argomento di una Nota [2], confermando così le previsioni del prof. Igino Cocchi [3]. Da quel tempo, tanto lo Stoppani quanto il Cocchi, il Lotti e il

(1) Questo fatto è del resto generale.

(2) *Sulla esistenza di un antico ghiacciaio nelle Alpi Apuane* (Rend. Ist. Lomb. 18 luglio 1872).

(3) *L'uomo fossile nell'Italia centrale* (Soc. it. sc. nat., vol. II, p. 36, anno 1867).