ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

cerche sulle *Hypoxidaceae*, sommariamente esposte in questa e nelle citate Note, possiamo concludere:

« 1.° Nelle *Hypoxidaceae* esistono serbatoi mucipari caratteristici, finora non riscontrati nei gruppi delle Monocotiledoni affini a questo.

« 2.° Tali serbatoi mancano nelle radici, siano primarie, siano laterali, e mancano pure in tutte le parti, che costituiscono la regione fiorale.

« 3.° Essi si riscontrano sempre nel rizoma e nei fillomi della regione vegetativa. Però la loro distribuzione in questi due membri del corpo della pianta è diversa pei due generi che costituiscono il gruppo. Nelle *Hypoxis* infatti i serbatoi occupano nel rizoma la sola regione corticale e non si trovano che nelle guaine delle foglie normali e delle vaginanti. Nelle *Curculigo* si hanno serbatoi sia nella regione corticale, che nella centrale del rizoma, e si riscontrano non solo nella guaina delle foglie tutte, ma anche nel picciolo delle normali. In tutti e due i generi mancano nella lamina della foglia.

« 4.° Questo carattere anatomico pare di considerevole valore per staccare il gruppo delle *Hypoxidaceae* dalla famiglia delle Amarillidacee, nella quale dai più è collocato. La costituzione di una famiglia a sè è anche consigliata dalla presenza di altri caratteri distintivi [1] e dalla considerazione che un recentissimo studio in corso di pubblicazione [2] condotto sopra gruppi o famiglie, che si ritengono affini alle *Hypoxidaceae* (quali Emodoracee, Connaracee, Conostilidee ecc.) mostra che il ricordato carattere anatomico di valore sistematico non si riscontra che nelle *Hypoxis* e nelle *Curculigo* ».

Matematica. — *Sopra alcune varietà della superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

« Questa Nota contiene l'esame dei varii casi di decomposizione della cubica doppia della superficie del 5° ordine di cui mi sono occupato in varie Note precedenti [3], e l'esame dei casi che può presentare la superficie stessa dal punto di vista della configurazione delle sue rette. È indispensabile, per l'intelligenza di questo scritto, tener presente quanto ho sviluppato in quelle Note.

(1) Pirotta R., *Sulla costituzione della famiglia delle Hypoxidaceae*. Bull. Soc. Botan. ital., 1892, p. 112.

(2) Scharf W., *Beitr. zur Anatomie der Hypoxidaceen u. einig. verwandt. Pflanzen.* — Botan. Centralbl. B. LII, 1892, p. 178. — Lo Scharf accenna brevissimamente e in modo affatto superficiale ai canali mucipari delle *Hypoxidaceae* e mostra di non conoscere i lavori già pubblicati sull'argomento.

(3) Cfr. questi Rend., fasc. settembre 1° e 2°; novembre 2°. — Citerò queste Note quando occorrerà scrivendo rispettivamente I, II, III.

I.

La superficie con cubica doppia decomposta.

« 1. Una cubica prodotta per corrispondenza proiettiva fra le generatrici di un cono di 2° ordine (P) ed un fascio di piani (b) degenera nei seguenti casi:

1° quando la generatrice di (P) corrispondente al piano Pb giace in questo piano; ed allora la cubica si riduce a quella generatrice e ad una conica che, in generale, non passa per P, ma è appoggiata alla generatrice;

2° quando (P) si spezza in due piani π_1, π_2; ed allora la cubica si riduce ad una conica che passa per P, giacente in uno di quei piani, ed in una retta dell'altro piano, ma appoggiata alla conica;

3° quando la conica dei due casi precedenti essa stessa si decompone in due rette;

4° quando b passa per P, senza che (P) degeneri, ed allora la cubica si riduce a 3 rette di P;

5° quando b passa per P e (P) degenera.

« 2. Cerchiamo come deve essere scelto il polo ξ_i della superficie perchè si verifichiano i precedenti casi di degenerazione della cubica doppia di essa, e quali altre particolarità si presentano.

« Supponiamo, pel momento, sempre generale la rete ($\mathfrak{R}$). Allora avremo:

1° Essendo le generatrici di (P) le polari dei punti di b' rispetto al fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$, ed inoltre, essendo i piani di (b), corrispondenti a quelle generatrici, i piani polari di quegli stessi punti rispetto a $\psi = 0$, la generatrice di (P) corrispondente del piano Pb di (b) sarà c. Ora lo stare di c in Pb esige che c sia coniugata a tutti i punti di b' rispetto alla rete ($\mathfrak{R}$), cioè che c sia una trisecante della N^6; epperò che P sia su R^8. Viceversa, è stato visto (cfr. I n. 6) che per ogni punto preso su R^8 e che non sia su N^6 la cubica φ^3 si decompone. Dunque, noi possiamo dire che i punti P per i quali la superficie Φ_P ha una retta doppia per P ed una conica doppia che non passa per P sono i punti della rigata R^8, eccettuato quelli che sono pure punti di N^6.

« Si osservi che nel caso in esame la retta doppia della superficie è precisamente la generatrice della rigata R^8 che passa pel punto triplo, e che essa è pure la generatrice doppia del cono tangente in questo punto.

2° Il cono (P) essendo il cono del complesso Ω_c che ha il vertice in P, si spezza quando P giace in una qualunque delle facce del tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$. Supponendo, p. e., che sia stato preso in $A_2 A_3 A_4 \equiv \alpha_1$, il cono (P) si riduce ad α_1 e ad un piano α''_1 che passa per A_1; α''_1 è quello che contiene la conica doppia della superficie ed α_1 quello che contiene la retta doppia: questa è poi, riportandosi alla costruzione data nella Nota II n. 2°, la retta $\alpha_1 \alpha'_1 \equiv h_1$ (II, 1). Si può dunque dire: i punti P per i quali la superficie Φ_P ha una conica doppia pel punto triplo ed una retta doppia altrove sono i punti delle 4 facce del tetraedro dei punti A_i.

È ad osservarsi che pei punti presi su una stessa delle facce α_i del tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$ le superficie Φ_P hanno tutte la medesima retta doppia, che è la $\alpha_i \alpha'_i \equiv h_i$: la conica doppia varia da una superficie ad un'altra: il suo piano descrive la retta a_i.

3° La conica di cui è parola in 1° non può degenerare senza che degeneri il cono (P); rimane dunque a far degenerare la conica di cui è parola in 2°. Ciò accade precisamente quando i due fasci generatori della conica sono prospettivi, cioè quando, essendo P in uno dei piani α_i, è P anche sulla rigata R^8. Il caso attuale 3° si presenta, dunque, quando P è all'intersezione di R^8 con uno qualunque dei piani α_i; epperò si può dire che i punti P per i quali le superficie Φ_P assumono tre rette doppie, di cui una soltanto passa per P, sono i punti della sezione della rigata R^8 con i piani α_i $(i = 1, \ldots, 4)$ eccettuati quelli che sono pure punti di N^6.

Si deve osservare che fa parte della sezione della rigata R^8 col piano α_i la retta h_i.

4° e 5°. In questi due casi degenera anche la superficie. In fatti, essendo b la polare di b' rispetto a $\psi = 0$, quando b passa per P vuol dire che b' è nel piano π, cioè che b' è una generatrice di R^8, epperò che P è su N^6. L'essere P su N^6 importa che il cono polare congiunto di P risulta indeterminato, e C_P come sono proiettante la cubica Q^3 (I, 3) si riduce ad un cono del 2° ordine perchè Q^3 contiene P. La superficie quindi diventa del 4° ordine con P quale punto doppio conico. Sicchè pei punti P della sestica N^6, la superficie Φ_P è del 4° ordine e possiede tre rette doppie per P; e queste sono le tre trisecanti della N^6 uscenti da P. Se P è uno dei punti comuni ad N^6 ed ai piani α_i, ma non uno dei punti A_i, $(P) \equiv C_P$ si spezza in due piani; e se è $P \equiv A_i$ la Φ_P diventa del 3° ordine con un punto doppio in P.

II.

Decomposizione del cono tangente al punto triplo.

3. Accanto ai casi precedenti, in cui si sono avute di mira le varietà della superficie rispetto al modo di degenerare della sua cubica doppia, vi sono quelli in cui è il cono tangente al punto triplo che si decompone. Questo può ridursi ad un piano ed un cono del 2° ordine, o a tre piani.

1° Se il punto P si prende nel piano α'_i (II, 1) il piano π passa per A_i e la cubica Q^3 si riduce ad una retta p_i per A_i con una conica ω in α_i. Il cono C_P si spezza quindi nel piano Pp_i e nel cono quadrico $P\omega$.

2° Se P si prende, in vece, sulla retta $\alpha_i' \alpha'_k$, il piano π passa per $A_i A_k$, la cubica Q^3 si decompone in due rette l'una p_i per A_i, l'altra p_k per A_k e nella retta $A_l A_m$ $(ik, lm = 12, \ldots, 34)$ e C_P diventa $Pp_i + Pp_k + PA_lA_m$.

3° Se P è uno dei punti $A'_i, \equiv \alpha'_k \alpha'_l \alpha'_m$ sarà $\pi \equiv \alpha_i$, $Q^3 \equiv A_i$ $(\overline{A_k + A_l + A_m})$ e $\overline{C_P} \equiv P\,(\overline{A_i A_k + A_i A_l + A_i A_m})$. Questo caso è distinto dal precedente perchè nell'uno i piani nou formano fascio, nell'altro sì.

« Da quest'ultimo caso segue che le superficie Φ_P dei punti della retta $A_i A'_i$ hanno tutte, oltre che in P, anche in A'_i un punto triplo.

4° Se, in fine, P, preso sulla α'_i, è pure sulla α_k, allora si decompongono insieme cubica doppia e cono tangente al punto triplo; e se è $i = k$ quest'ultimo si riduce ad una terna di piani di cui due coincidenti in α_i.

III.

La superficie rispetto alle rette uscenti dal punto triplo.

« 4. Si è visto che la conoscenza delle rette a_k della superficie dipende dalla conoscenza delle 4 radici dell'equazione (cfr. I, equ.^{e} 3).

$$| c_{ik} | = 0 \tag{1}$$

e che quindi le particolarità di questa equazione sono altrettante particolarità della distribuzione di quelle rette, e della superficie.

« Supponiamo che la (1) possegga h radici uguali ad una quantità a, k uguali a b, l uguali a c ed m uguali a d, sicchè sia $h + k + l + m = 4$. Allora corrispondentemente si avranno i seguenti casi:

$$\overbrace{h = k = l = m = 1}^{1^\circ \text{ caso}}\,; \quad \overbrace{h = 2, k = l = 1, m = 0}^{2^\circ \text{ caso}}\,; \quad \overbrace{h = k = 2, l = m = 0}^{3^\circ \text{ caso}}\,;$$

$$\overbrace{h = 3, k = 1, l = m = 0}^{4^\circ \text{ caso}} \qquad \overbrace{h = 4, k = l = m = 0}^{5^\circ \text{ caso}}$$

« Supponiamo inoltre che nei casi da 2° a 5° niuna delle radici multiple annulli, oltre del determinante $| c_{ik} |$, tutti i suoi minori del 3° ordine. Allora, mantenendo generale la posizione di $\psi = 0$ rispetto a $\lambda f + \mu\varphi = 0$, la sestica N^6 non degenererà, e quindi nemmeno Φ_P perP arbitrario. In corrispondenza dei casi sopra nominati noi avremo, dunque, quanto segue:

a) Il caso 1° è il caso generale. Supponendo reali le 4 radici potremo prendere il tetraedro auto-coniugato comune alle quadriche del fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$ come tetraedro di riferimento. Allora $f = 0$, $\varphi = 0$ potranno rispettivamente essere scritte nella forma:

$$f \equiv f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + f_3 x_3^3 + f_4 x_4^2 = 0\,;$$
$$\varphi \equiv \varphi_1 x_1^2 + \varphi_2 x_2^2 + \varphi_3 x_3^2 + \varphi_3 x_4^2 = 0$$

ed avendosi allora

$$\frac{\partial \theta}{\partial \vartheta_i} = \theta_i \, \vartheta_i$$

$$(\theta \equiv f, \varphi; \vartheta \equiv \xi, \eta^{(k)}; i = 1, \ldots, 4; k = 1, 2, 3)$$

col porre $f_i \varphi_l = \tau_{il}$ $(il = 11, \ldots, \ldots, 34)$ e

$$\tau_{il} \xi_i \eta_l^{(k)} - \tau_{li} \xi_l \eta_i^{(k)} = p_{il}^{(k)}$$

con che è $p_{ii}^{(k)} = 0$ l'equazione della superficie sarà la 27 data nella Nota II, quando le H_{ik} si rimpiazzino con espressioni della forma

$$\sum_{l=1}^{l=3} \Im_l \, p_{ik}^{(l)} ;$$

e per avere l'equazione di una superficie del 5° ordine con conica doppia fuori del punto triplo e con una retta doppia per questo punto basta nell'equazione così ottenuta di porre, p. e., $\xi_4 = 0$.

« Si osservi che nel caso in esame le formule (4′) della rappresentazione parametrica, diventano quelle date nella Nota II (nota 1 al n.° 4).

b) Nel 2° caso due delle rotte a_k coincidono; sicchè la superficie presenta pel punto triplo tre rette, lungo una delle quali è toccata sia dal cono (P) che dal cono C_P.

c) Nel 3° caso le rette a_k coincidono due a due, sicchè la superficie ha pel punto triplo due rette lungo ciascuna delle quali è toccata da C_P e (P).

d) Nel 4° caso tre delle rette a_k coincidono; e la superficie presenta pel punto triplo due rette, lungo una delle quali è osculata sia da C_P che da (P).

e) Nel 5° caso la superficie presenta una sol retta pel punto triplo, lungo la quale è sovra-osculata da C_P e da (P).

« Per brevità di esposizione io raccoglierò ora in un quadro le formule che nei diversi casi da 2° a 5° conducono all'equazione della superficie. Terrò perciò presenti la equazione 27 della II, ed il significato che in essa hanno le quantità H_{ik}.

« Scegliendo convenientemente il tetraedro di riferimento, si può prendere:

nel 2° caso $f = ax_1^2 + bx_2^3 + x_3^2 \, 2cx_3 x_4$; $\varphi = x_1^2 + x_2^2 \, 2x_3 x_4$

» 3° » $f = x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 x_2 - 2bx_3 x_4$; $\varphi = x_1 x_2 + x_3 x_4$

» 4° » $f = ax_1^2 + b(x_3^2 + 2x_2 x_4) + 2x_2 x_3$; $\varphi = x_1^2 + x_3^2 + 2x_2 x_4$

» 5° » $f = 2a(x_1 x_2 + x_2 x_3) - x_3^2 - 2x_1 x_3$; $\varphi = 2(x_1 x_2 + x_2 x_3)$

epperò corrispondentemente si avrà per $\vartheta \equiv \xi, \eta_i^{(k)}$:

	2° caso	3° caso	4° caso	5° caso
$\dfrac{\partial f}{\partial \vartheta_1} \equiv$	$a\vartheta_1$	$\vartheta_1 - a\vartheta_2$	$a\vartheta_1$	$a\vartheta_2 - \vartheta_3$
$\dfrac{\partial f}{\partial \vartheta_2} \equiv$	$b\vartheta_2$	$\vartheta_2 - a\vartheta_1$	$b\vartheta_4 + \vartheta_3$	$a(\vartheta_1 + \vartheta_3)$
$\dfrac{\partial f}{\partial \vartheta_3} \equiv$	$\vartheta_3 - c\vartheta_4$	$- b\vartheta_4$	$b\vartheta_3 + \vartheta_2$	$a\vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_1$
$\dfrac{\partial f}{\partial \vartheta_4} \equiv$	$- c\vartheta_2$	$- b\vartheta_3$	$b\vartheta_2$	0

	2° caso	3° caso	4° caso	5° caso
$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} \equiv$	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_1	ϑ_2
$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_2} \equiv$	ϑ_2	ϑ_1	ϑ_4	$\vartheta_1 + \vartheta_3$
$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_3} \equiv$	$- \vartheta_4$	ϑ_4	ϑ_3	ϑ_2
$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_3} \equiv$	$- \vartheta_3$	ϑ_3	ϑ_2	0

epperò anche, per $k = 1, \ldots, 4$:

	2° caso	3° caso	4° caso	5° caso
$\mathfrak{H}_{11}^{(k)} \equiv$	0	$\xi_1 \eta_2^{(k)} - \xi_2 \eta_1^{(k)}$	0	$\xi_3 \eta_2^{(k)} - \xi_2 \eta_3^{(k)}$
$\mathfrak{H}_{22}^{(k)} \equiv$	0	$\xi_2 \eta_1^{(k)} - \xi_1 \eta_2^{(k)}$	$\xi_3 \eta_4^{(k)} - \xi_4 \eta_3^{(k)}$	0
$\mathfrak{H}_{33}^{(k)} \equiv$	$\xi_4 \eta_4^{(k)} - \xi_4 \eta_3^{(k)}$	0	$\xi_2 \eta_4^{(k)} - \xi_4 \eta_2^{(k)}$	$\xi_1 \eta_2^{(k)} - \xi_1 \eta_i^{(k)} + \xi_3 \eta_i^{(k)} - \xi_2 \eta_3^{(k)}$
$\mathfrak{H}_{44}^{(k)} \equiv$	$c\,(\xi_3 \eta_3^{(k)} - \xi_3 \eta_2^{(k)})$	0	0	0
$\mathfrak{H}_{12}^{(k)} \equiv$	$a\xi_1 \eta_2^{(k)} - b\xi_2 \eta_1^{(k)}$	$\xi_1 \eta_1^{(k)} - \xi_2 \eta_2^{(k)}$	$a\xi_1 \eta_4^{(k)} - b\xi_1 \eta_4^{(k)} - \xi_1 \eta_3^{(k)}$	$\xi_3 (\eta_1^{(k)} + \eta_2^{(k)} - \xi_2 \eta_2^{(k)}$
$\mathfrak{H}_{23}^{(k)} \equiv$	$(b + c) \xi_2 \eta_4^{(k)} - \xi_2 \eta_3^{(k)}$	$\xi_2 \eta_4^{(k)} - (a - b)\, \xi_1 \eta_4^{(k)}$	$\xi_3 \eta_3^{(k)} - \xi_4 \eta_2^{(k)}$	$\xi_2 \eta_2^{(k)} - (\xi_1 + \xi_3)\, \eta_1^{(k)}$
$\mathfrak{H}_{31}^{(k)} \equiv$	$\xi_3 \eta_1^{(k)} - (a + c)\, \xi_4 \eta_1^{(k)}$	$(a - b)\, \xi_4 \eta_2^{(k)} - \xi_4 \eta_1^{(k)}$	$(a - b)\, \xi_1 \eta_3^{(k)} - \xi_1 \eta_2^{(k)}$	$\xi_1 \eta_2^{(k)} - \xi_2 \eta_3^{(k)}$
$\mathfrak{H}_{14}^{(k)} \equiv$	$(a + c)\, \xi_1 \eta_3^{(k)}$	$\xi_1 \eta_3^{(k)} - (a - b)\, \xi_2 \eta_3^{(k)}$	$(a - b) \eta_3 \xi_2^{(k)}$	0
$\mathfrak{H}_{24}^{(k)} \equiv$	$(b + c)\, \xi_2 \eta_3^{(k)}$	$\xi_2 \eta_3^{(k)} - (a - b)\, \xi_1 \eta_3^{(k)}$	$\xi_3 \eta_2^{(k)}$	0
$\mathfrak{H}_{34}^{(k)} \equiv$	$\xi_3 \eta_3^{(k)}$	0	$\xi_2 \eta_2^{(k)}$	0

« Non resta ora che a forare le espressioni H_{ik} con queste espressioni particolari delle $\mathfrak{H}_{il}^{(k)}$ e sostituirle nella (27) (cfr. II) per avere la equazione della superfivie corrispondentemente a ciascuno dei casi considerati.

« 5. Sarebbe ora facile formarsi anche le formule analoghe alle (4′), vista la particolare forma che nei casi considerati assume il determinante $|c_{ik}|$, ma io non mi fermo su ciò visto che il lettore può farsi da sè tali formule, e visto che esse non sono quelle della rappresentazione parametrica di ordine minimo. Faccio piuttosto osservare che ad altre varietà della superficie ed a degenerazioni di questa si perviene disponendo del polo P nel modo che è stato indicato al § I.

« Del resto ad altre varietà si perviene anche, rispetto al modo di presentarsi delle rette che sono corde della cubica doppia non uscenti dal punto triplo, conformando convenientemente sul piano rappresentativo il gruppo dei 7 punti B_k.

IV.

La superficie allorchè acquista altre rette.

« 6. Si è visto al n. 6 della Nota I che se un valore $\lambda_0 : \mu_0$ del parametro $\lambda : \mu$ è tale che per esso una radice σ_0 dell'equazione $|i_k| = 0$ annulla tutti i minori del 3° ordine del determinante $|i_k|$ senza annullare quelli del 2° ordine, la sestica N^6 si decompone. Dicendo corrispondenti i valori $\lambda_0 : \mu_0$ e σ_0 si hanno allora i seguenti casi possibili che insieme alla degenerazione della N^6 non trascinano la degenerazione della superficie:

i.° Esiste un valore di $\lambda_0 : \mu_0$ ed i corrispondenti valori di σ_0 $(i = 1, 2)$.

i.° Esistono due valori di $\lambda_0 : \mu_0$ ciascuno dei quali ha k corrispondenti valori σ_0 $(i = 3, k = 1 ; i = 4, k = 2)$.

5.° Esistono due valori di $\lambda_0 : \mu_0$ uno dei quali ha un corrispondente valore σ_0 e l'altro due.

i.° Coincidono i due valori del caso k.° $(i = 6, k = 2 ; i = 7, k = 5)$.

8.° » soltanto i valori corrispondenti ad un valore $\lambda_0 : \mu_0$ del caso 4°.

9.° » sia » » » » » » » » che quelli corrispondenti all'altro valore.

« Mostriamo che gli altri casi cui può dar luogo l'equazione $|i_k| = 0$ conducono a degenerazioni della superficie.

1° Per un valore $\lambda_0 : \mu_0$ di $\lambda : \mu$ esista un valore σ_0 di σ per cui sono nulli tutti i minori del 2° ordine di $|i_k|$. Allora un'omografia del sistema $\Omega_{\lambda,\mu}$ (cfr. nota I), la Ω_{λ_0,μ_0} è omologica. Il piano π_0 di omologia, essendo luogo di punti uniti per tale omografia farà parte della superficie; epperciò questa si scindera in un piano ed in una superficie, in generale, del 4° ordine.

2° Se un valore $\lambda_0 : \mu_0$ cui corrisponde o non un valore σ_0 di σ è tale che per esso, insieme a $|c_{ik}| = 0$ si ha $\frac{\partial |c_{ik}|}{\partial c_{ik}} = 0$ $(ik = 12, \ldots, 34)$, allora o è assiale, con $k = 1, 2$ assi di punti uniti, l'omografia risultante dal comporre le polarità rispetto a due qualunque delle quadriche del fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$, o una tale omografia è omologica. Qualunque sia il caso, dicendo m una retta di punti uniti, tutti i punti del piano Pm soddisfanno alla definizione data nel n. 1 della Nota I, cui soddisfanno tutti i punti di Φ_P. Questa dunque si scinde in k piani ed in una superficie dell'ordine (5-k, dotata in P di un punto $(3\text{-}k)^{plo}$ $(k = 1, 2)$, o diviene indeterminata.

« 7. Trascurando, dunque, i casi di degenerazione che pur presenterebbero dell'interesse, abbiamo che la superficie acquista:

« Nel caso $i.$°, k altre rette

$$(i = 1, k = 1;\ i = 2, 3, k = 2;\ i = 4.\ k = 4;\ i = 5, k = 3).$$

« Nel caso 6°, due rette infinitamente vicine.

« Nel caso $i.$°, k rette di cui due infinitamente vicine

$$(i = 7, k = 3;\ i = 8, k = 4).$$

« Nel caso 9.° 4 rette due a due come sopra.

« 8. I casi precedenti suppongono tutti che la rete $(\mathfrak{R})$ non sia quella specialissima in cui esiste un tetraedro autopolare comune alle quadriche della rete. Se questo fosse il caso la superficie avrebbe per rette le sei costole di quel tetraedro. È notevole la forma semplicissima che assumono allora le formule (4') date nella Nota I, poichè si hanno rispettivamente per la superficie, e pel cono tangente al punto triplo, le equazioni

$$x_i \equiv \frac{\xi_i}{C_{ii} - \chi_{ii}\, z^3}\,, \quad x_i \equiv \xi_i\,(C_{ii} - \chi_{ii}\, z^3) \quad \left(i = 1, \ldots, 4;\ \chi_{ii} = \frac{1}{\psi_{ii}}\right) \text{ ».}$$

Matematica. — *Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine.* Nota I. di Ernesto Pascal, presentata dal Socio Cremona.

« In un lavoro da me pubblicato da poco tempo [1], io ho sviluppato i fondamenti di un metodo singolare per lo studio delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4.

« In lavori successivi, in corso di pubblicazione presso l'Istituto Lombardo e presso gli Annali di matematica, io mi sono servito di quel metodo per lo studio della configurazione delle 27 rette della superficie di 3° ordine, e, oltre il gran numero di teoremi e di aggruppamenti nuovi da me trovati,

[1] *Rappresentazione geometrica* ecc. Annali, t. XX.