ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

2° Se un valore $\lambda_0 : \mu_0$ cui corrisponde o non un valore σ_0 di σ è tale che per esso, insieme a $|c_{ik}| = 0$ si ha $\frac{\partial |c_{ik}|}{\partial c_{ik}} = 0$ $(ik = 12, \ldots, 34)$, allora o è assiale, con $k = 1, 2$ assi di punti uniti, l'omografia risultante dal comporre le polarità rispetto a due qualunque delle quadriche del fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$, o una tale omografia è omologica. Qualunque sia il caso, dicendo m una retta di punti uniti, tutti i punti del piano Pm soddisfanno alla definizione data nel n. 1 della Nota I, cui soddisfanno tutti i punti di Φ_P. Questa dunque si scinde in k piani ed in una superficie dell'ordine (5-k, dotata in P di un punto (3-k)^{plo} $(k = 1, 2)$, o diviene indeterminata.

« 7. Trascurando, dunque, i casi di degenerazione che pur presenterebbero dell'interesse, abbiamo che la superficie acquista:

« Nel caso i.°, k altre rette

$$(i = 1, k = 1;\ i = 2, 3, k = 2;\ i = 4.\ k = 4;\ i = 5, k = 3).$$

« Nel caso 6°, due rette infinitamente vicine.

« Nel caso i.°, k rette di cui due infinitamente vicine

$$(i = 7, k = 3;\ i = 8, k = 4).$$

« Nel caso 9.° 4 rette due a due come sopra.

« 8. I casi precedenti suppongono tutti che la rete ($\mathfrak{R}$) non sia quella specialissima in cui esiste un tetraedro autopolare comune alle quadriche della rete. Se questo fosse il caso la superficie avrebbe per rette le sei costole di quel tetraedro. È notevole la forma semplicissima che assumono allora le formule (4') date nella Nota I, poichè si hanno rispettivamente per la superficie, e pel cono tangente al punto triplo, le equazioni

$$x_i \equiv \frac{\xi_i}{C_{ii} - \chi_{ii}\, z^3}\,, \quad x_i \equiv \xi_i\,(C_{ii} - \chi_{ii}\, z^3) \quad \left(i = 1, \ldots, 4;\ \chi_{ii} = \frac{1}{\psi_{ii}}\right) \text{»}.$$

Matematica. — *Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine.* Nota I. di Ernesto Pascal, presentata dal Socio Cremona.

« In un lavoro da me pubblicato da poco tempo [1], io ho sviluppato i fondamenti di un metodo singolare per lo studio delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4.

« In lavori successivi, in corso di pubblicazione presso l'Istituto Lombardo e presso gli Annali di matematica, io mi sono servito di quel metodo per lo studio della configurazione delle 27 rette della superficie di 3° ordine, e, oltre il gran numero di teoremi e di aggruppamenti nuovi da me trovati,

[1] *Rappresentazione geometrica* ecc. Annali, t. XX.

ho potuto, ciò che è forse più interessante, raccogliere ogni ricerca di quella natura sotto un punto di vista generale ed unico.

« Ora basta avere scorso i primi capitoli del lavoro succitato per avere inteso che lo studio delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4 si correla strettamente con quello delle 28 tangenti doppie della curva piana di 4° ordine, e dei 120 piani tritangenti della sestica storta di genere 4. Ed io allora mi son proposto di studiare, in questo lavoro e nei successivi, la configurazione delle 28 tangenti doppie della C_4 e quella dei 120 piani tritangenti della sestica storta. Della prima configurazione io ne considererò qui un lato nuovo non ancora studiato, e in quanto poi alla seconda non è a mia notizia che essa sia stata sinora in qualche modo studiata.

« E poichè questi altri lavori mi sembra che posseggano un interesse anche maggiore di quello che per avventura poteano avere i primi, così mi son permesso di presentarli a codesta illustre Accademia perchè li accolga benevolmente sotto i suoi auspicii.

« Naturalmente non potrò soffermarmi su molti dettagli perchè la tirannia dello spazio me lo vieta, e per la stessa ragione non potrò fermarmi a sviluppare i principî generali che andrò man mano applicando e che ho già sviluppati altrove, e quindi comincerò a scrivere immaginandomi che il lettore abbia presenti quei metodi e quel mio lavoro.

« E così in quanto alle figure sulle quali dovremo ragionare, esse sono sempre così uniformi, così semplici e così facili ad immaginarsi (otto punti congiunti a due a due con 28 rette) che potremo sempre dispensarci dall'eseguirle.

§. 1. — Preliminari.

« Si sa che una curva di un sistema di cubiche di contatto di caratteristica dispari, è tale che per i sei punti che essa ha comuni colla quartica fondamentale, passa una conica che passa poi anche per i due punti di contatto della tangente doppia coordinata al dato sistema. Fra le curve del sistema ve ne sono alcune spezzate in tre tangenti doppie, dunque possiamo allora dire che le tangenti doppie si raccolgono a quattro a quattro in maniera che la somma delle loro caratteristiche sia zero, e che per gli otto punti di contatto passi una conica. In altri termini considerando sulla curva di 4° ordine i 56 punti di contatto delle 28 tangenti doppie, possiamo dire che essi si riuniscono ad otto ad otto esistenti su di una stessa conica, e ognuna di queste coniche corrisponderà ad una di quelle 315 *quaterne-zero* studiate da noi nel §. 8 della cit. Mem. Si ottengono dunque 315 coniche coordinate alla curva di 4° ordine, e noi vogliamo ora studiare la loro configurazione.

« È chiaro che se due di quelle coniche si incontrano sulla curva di 4° ordine, il loro punto d'incontro non sarà che uno dei 56 punti di cui si è parlato. Noi diremo per brevità che due di quelle coniche *si incontrano* quando hanno in comune un punto della curva di 4° ordine, e quando ciò non succede le diremo *esterne* l'una all'altra. Ed è chiaro inoltre che due di quelle coniche non possono incontrarsi in uno solo dei 56 punti, ma sempre o in due o in quattro.

« Noi vogliamo cominciare a studiare *gli assiomi di coniche esterne l'una all'altra*.

« Tenendo presenti le due figure annesse allo stesso §. 8 della cit. Mem. possiamo dire che nella nostra rappresentazione delle 28 tangenti doppie, ognuna delle coniche resta rappresentata o coll'assieme di quattro rette non aventi nessun punto comune (fra gli otto punti fondamentali) o colle quattro rette di un quadrilatero chiuso.

« È facile poi vedere che il gruppo delle sostituzioni di monodromia che lasciano fissa una di queste quaterne di rette, cioè una delle 315 coniche, ha per ordine $\frac{36.8}{315}=9.8.8.8$, e rispetto ad una delle coniche le altre 314 si scindono in $24+128+162$ di cui le prime hanno 4 punti comuni (sulla curva di 4° ordine, s'intende) colla data, le seconde hanno solo due punti comuni, e le terze sono *esterne* alla data.

§. 2. — Studio del sottogruppo di monodromia che lascia fissa una delle 315 coniche.

« Indichiamo coi numeri 1, 2,.... 8, gli otto punti presi a fondamento della nostra rappresentazione, e consideriamo la conica rappresentata dal quadrilatero (1 2 3 4). Sappiamo che esistono sei coppie di rette le cui caratteristiche dànno la stessa somma, e quindi vi saranno altre coppie di rette in tal maniera coordinate alla coppia (12) (34) o alla coppia (14) (23), e così poi altre quattro coppie coordinate a (12) (23) o (14) (34) e altre quattro coordinate finalmente a (12) (14) o (23) (34). Si ricava cioè che le altre 24 rette restanti (quando dalle 28 si tolgono quelle del quadrilatero) si separano in tre sistemi d'imprimitività che sono rispettivamente:

$$\begin{array}{cccc} 13.24\ , & 56.78\ , & 57.68\ , & 58.67 \\ 15.35\ , & 16.36\ , & 17.37\ , & 18.38 \\ 25.45\ , & 26.46\ , & 27.47\ , & 28.48 \end{array}$$

« Questi tre sistemi d'imprimitività restano ciascuno fisso, se restano fisse le coppie formate colle quattro rette del quadrilatero (1 2 3 4), e queste restano fisse per le seguenti quattro sostituzioni fra i punti 1, 2, 3, 4:

$$1\ ,\ (13)\ ,\ (24)\ ,\ (13)(24)$$

e allora l'ordine del sottogruppo che lascia fissi i tre sistemi d'imprimitività sarà 3.4.8.8, e se vogliamo inoltre lasciar fissa una delle rette di un sistema, l'ordine diventa semplicemente 3.8.4 [1].

« Ora io farò vedere che se la retta da lasciar fissa è la prima del primo sistema, allora le 3.8.4 sostituzioni fra le 24 rette si possono rappresentare in una maniera semplicissima. Effettivamente le 4! sostituzioni fra i punti 5, 6, 7, 8 esterni al quadrilatero fondamentale fisso, non alterano questo quadrilatero, non scambiano fra loro i tre sistemi d'imprimitività, e non alterano la prima retta (13); e inoltre le quattro sostituzioni suindicate, fra quattro punti, neanche alterano il quadrilatero, i sistemi, e la retta, e quindi nel complesso si hanno 3.8.4 sostituzioni che apparterranno certamente al sottogruppo che si vuol considerare, e che sono semplicissimamente rappresentabili, cioè per mezzo di semplici permutazioni di alcuni degli otto punti fondamentali. Quel numero è precisamente il numero di tutte quelle da ricercarsi, e quindi possiamo dire:

« Il sottogruppo (g) che lascia fissi i tre sistemi d'imprimitività e che
« lascia fissa la retta (13) (o (24)) è dato dalle 4! permutazioni dei quattro
« punti esterni, insieme alle 4 suindicate permutazioni dei punti 1, 2, 3, 4 ».

« Possiamo ricercare più generalmente le sostituzioni che, anzichè lasciare fissa la retta (13) e quindi (24), lasciano solo fissa la coppia (13.24) potendo scambiare fra loro le due rette della coppia. Il numero delle sostituzioni diventa allora doppio, e per trovarle tutte basterà aggiungere le stesse di prima ai prodotti di esse per un'altra sola sostituzione che produca questo effetto.

« Ricordando le cose da noi dette nel §. 23 della Mem. cit. si vede subito che una sostituzione di tal natura può definirsi come quella che muta le rette del *sistema completo*

$$32 . 31 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38$$

rispettivamente nelle rette dell'altro

$$14 . 24 . 21 . 35 . 36 . 37 . 38.$$

« Questa sostituzione, che chiameremo σ, produce una permutazione abbastanza semplice fra le 24 rette. Lascia inalterate le 16 rette che congiungono i primi quattro punti cogli altri quattro, e permuta una delle $6+6$ rette, che congiungono fra loro a due a due i primi quattro punti, e fra loro gli altri quattro, in quella che congiunge i due rimanenti punti pei quali essa non passa, come facilmente si può verificare. Dunque:
« il sottogruppo più ampio che lasciando fissi i tre sistemi, lascia fissa solo
« una coppia del primo sistema, è formato da (g, σ) ».

[1] Si può mostrare che il gruppo che lascia fisso il quadrilalero è transitivo in tutte le 24 rette restanti, e quello che lascia fissi anche i tre sistemi è transitivo nelle 8 rette di un sistema.

« Esaminando ora i gruppi così costituiti possiamo enunciare i seguenti teoremi:

1. Il gruppo che lascia fissi i tre sistemi d'imprimitività possiede una quadrupla transitività nelle quattro coppie di uno dei sistemi.

2. Il gruppo che lascia fissi i tre sistemi e una delle otto rette di un sistema, è transitivo nelle altre 6 rette dello stesso sistema, ed è anche transitivo nelle 8 rette di ciascuno degli altri sistemi.

3. Le sostituzioni che nel gruppo precedente lasciano fissa una coppia di uno degli altri due sistemi, lasciano fissa anche una coppia del terzo.

4. Se si fissano le quattro coppie di un sistema, restano ancora quattro sostituzioni possibili fra le quattro del secondo sistema; e, fissate queste, restano fissate quelle del terzo.

5. Nel medesimo gruppo del n. 2 le sostituzioni che lasciano fisse le coppie degli altri sistemi o permutano *contemporaneamente* i due elementi di ciascuna coppia del secondo sistema, o no. Così pel terzo sistema, ed indipendentemente dal sistema precedente.

§. 3. — Coppie di coniche esterne l'una all'altra.

« Colle 24 rette restanti si possono formare 162 altre quaterne-zero.

« Esaminando il quadro dei sistemi d'imprimitività del §. 2 vediamo che si possono formare, colle rette di quel quadro, le quaterne

$$13 \,.\, 24 \,.\, 56 \,.\, 78$$
$$13 \,.\, 15 \,.\, 56 \,.\, 36$$

di cui quelle del primo tipo sono 18 e quelle del secondo sono 144.

« Una del primo tipo è composta con due coppie di un medesimo sistema d'imprimitività, e pel teorema 1) del §. preced. si ha che tutte le quaterne così formate sono da ritenersi fra loro equivalenti. Quelle del secondo tipo sono composte con due rette di un sistema e due di un altro. Per i risultati del §. precedente si ha che tutte le siffatte quaterne contenenti la retta (13) e la retta (15) sono da ritenersi fra loro equivalenti perchè il gruppo che lascia fisso (13) (15) è transitivo nelle rette (56) (57) (58): e quindi anche tutte le 144 quaterne del secondo tipo sono fra loro equivalenti.

« Possiamo dunque dire che esistono due sole specie di coppie di coniche « esterne l'una all'altra, la prima specie è rappresentata dalla coppia

$$(12 \,.\, 23 \,.\, 34 \,.\, 41) \quad (13 \,.\, 24 \,.\, 56 \,.\, 78)$$

« e la seconda specie è rappresentata da

$$(12 \,.\, 23 \,.\, 34 \,.\, 41) \quad (13 \,.\, 15 \,.\, 56 \,.\, 36).$$

« Ve ne sono rispettivamente $\frac{315 \,.\, 18}{2} = 2835$, e $\frac{315 \,.\, 144}{2} = 22680$ di ciascuna delle due specie ».

« Dobbiamo ora passare a studiare le proprietà geometriche di queste due coppie di coniche.

« Esaminando la loro formazione si trova che colle rette di cui è formata la prima si possono formare le altre quaterne

12 . 34 . 13 . 24
12 . 34 . 56 . 78
23 . 41 . 13 . 24
23 . 41 . 56 . 78

Nella seconda specie poi due rette della prima quaterna o della seconda, vengono a formare terna *pari* (v. §. 7 della Mem. cit.) con ciascuna di due sole delle rette dell'altra quaterna e terne *dispari* colle altre due rette, oppure vengono a formare terna pari con tutte. Propriamente, si trova che si possono costruire 16 quaterne che contengono due rette della prima data e una della seconda o viceversa. Una di queste 16 altre quaterne è, p. e.

12 . 23 . 15 . 35.

Le quarte rette di queste 16 quaterne coincidono a due a due e sono rispettivamente

35 . 16 . 78 . 24
25 . 45 . 46 . 26

e, come si vede, formano altre due quaterne costituenti a loro volta una coppia di seconda specie perchè soddisfacenti alle medesime proprietà ora indicate. Da questa nuova coppia col medesimo procedimento si giungerebbe daccapo alla coppia data, come si può verificare.

« Interpretando dunque geometricamente tutti questi risultati si ha:

« Colle 315 coniche coordinate alla curva piana di quarto ordine, si possono « formare due sole specie distinte di coppie di coniche *esterne* l'una all'altra.

« Le proprietà geometriche della prima specie sono date dall'esistenza di 4 « coniche (fra le 315) che incontrano in 4 punti (sulla curva del 4° ordine) « ciascuna delle due date. Nella seconda specie non più sussiste questa proprietà, « ma esistono invece altre 16 coniche che incontrano (sempre, s'intende, sulla « curva del 4° ordine) in 4 punti una delle date e in *due* soli punti l'altra. « Per gli ultimi punti *residui* di queste 16 coniche, cioè per quelli nei quali « esse ancora incontrano la curva del 4° ordine, passano altre due coniche « formanti una coppia della stessa specie di quella data.

« La relazione che queste due coppie hanno fra loro è reciproca ».

« In una prossima Nota esporrò all'Accademia i risultati delle mie ulteriori ricerche ».