ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 3 luglio 1892.

Matematica. — *Sulla trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche.* Nota del Corrispondente LUIGI BIANCHI.

« Le note costruzioni geometriche, che permettono di passare da una superficie a curvatura costante negativa a nuove superficie di questa specie, richiedevano fino ad ora ad ogni nuova applicazione, e nell' ipotesi più favorevole, l'effettuazione di una quadratura.

« In questa Nota dimostro che basta conoscere *tutte* le trasformate contigue complementari e di Bäcklund di una superficie pseudosferica iniziale, perchè l'applicazione successiva dei metodi di trasformazione possa eseguirsi illimitatamente *con soli calcoli algebrici e di derivazione.* Inoltre per tutte le superficie del gruppo infinito, che deriva per tal modo dalla superficie iniziale, l'*equazione delle linee geodetiche si ottiene in termini finiti senza alcun calcolo d'integrazione.* Un effettivo esempio si ottiene partendo dall'ordinaria pseudosfera o più generalmente da un'elicoide del Dini.

« La possibilità di semplificare in tal modo i metodi generali di trasformazione delle superficie pseudosferiche è essenzialmente legata, come si vedrà, alla trasformazione di Bäcklund, la cui importanza non sembra sia stata fin qui abbastanza riconosciuta.

« È bensì vero che essa si compone di una trasformazione complementare preceduta e seguita da due trasformazioni di Lie, inversa l'una dell'altra. Però, mentre la trasformazione di Bäcklund e quella complementare sono realizzabili con effettive costruzioni geometriche, lo stesso non avviene per la trasformazione di Lie, il cui significato sembra puramente analitico.

I.

Formole per la trasformazione di Bäcklund.

« Riferiamo una superficie S a curvatura costante negativa $K = -1$ alle sue linee assintotiche (u, v) e sia

$$ds^2 = du^2 + 2\cos(2\omega)\,du\,dv + dv^2 \tag{1}$$

la nota espressione del suo elemento lineare, l'angolo 2ω compreso dalle assintotiche essendo una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2(2\omega)}{\partial u\,\partial v} = \operatorname{sen}(2\omega). \tag{2}$$

« Indicando con X, Y, Z ; X', Y', Z' ; X'', Y'', Z'' rispettivamente i coseni di direzione della normale e delle tangenti alle linee di curvatura nel punto (u,v), sussistono le formole

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial u} = \cos\omega X' + \operatorname{sen}\omega X'' \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\cos\omega X' + \operatorname{sen}\omega X'' \\
&\frac{\partial X'}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial u} X'' - \cos\omega X \quad , \quad \frac{\partial X'}{\partial v} = -\frac{\partial\omega}{\partial v} X'' + \cos\omega X \\
&\frac{\partial X''}{\partial u} = -\frac{\partial\omega}{\partial u} X' - \operatorname{sen}\omega X \quad , \quad \frac{\partial X''}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial v} X' - \operatorname{sen}\omega X ,
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

e le analoghe per Y, Z ; Y', Z' ; Y'', Z''. Per le coordinate correnti x, y, z del punto (u, v) sulla S abbiamo inoltre:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\operatorname{sen}\omega X' + \cos\omega X'', \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen}\omega X' + \cos\omega X'' \tag{4}$$

colle analoghe per y, z.

« Consideriamo ora una superficie S_1 trasformata di Bäcklund della S e sia $\cos\sigma_1$ la distanza costante di due punti corrispondenti di S, S_1 ; diremo allora che S_1 è legata ad S da una trasformazione di Bäcklund B_{σ_1}. Distinguendo coll' indice 1 le quantità che per la S_1 sono le analoghe delle x, y, z; X, Y, Z ecc. per la S, abbiamo, come è noto:

$$\left\{\begin{aligned}
x_1 &= x + \cos\sigma_1 (\operatorname{sen}\omega_1 X' + \cos\omega_1 X'') \\
y_1 &= y + \cos\sigma_1 (\operatorname{sen}\omega_1 Y' + \cos\omega_1 Y'') \\
z_1 &= z + \cos\sigma_1 (\operatorname{sen}\omega_1 Z' + \cos\omega_1 Z''),
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

la nuova soluzione ω_1 della (2) essendo legata alla ω dalle formole generalizzate di Darboux

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_1-\omega)}{\partial u}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\operatorname{sen}(\omega_1+\omega) \\ \dfrac{\partial(\omega_1+\omega)}{\partial v}=\dfrac{1-\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\operatorname{sen}(\omega_1-\omega). \end{cases}$$

« Pei coseni di direzione X_1, X'_1, X_1'' abbiamo poi:

$$(7)\quad \begin{cases} X_1=-\cos\sigma_1\cos\omega_1 X'+\cos\sigma_1\operatorname{sen}\omega_1 X''-\operatorname{sen}\sigma_1 X \\ X'_1=(\operatorname{sen}\omega_1\operatorname{sen}\omega-\operatorname{sen}\sigma_1\cos\omega_1\cos\omega)X'+(\cos\omega_1\operatorname{sen}\omega+\operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\omega_1\cos\omega)X''+ \\ \qquad +\cos\sigma_1\cos\omega X \\ X_1''=(\operatorname{sen}\omega_1\cos\omega+\operatorname{sen}\sigma_1\cos\omega_1\operatorname{sen}\omega)X'+(\cos\omega_1\cos\omega-\operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\omega_1\operatorname{sen}\omega)X''- \\ \qquad -\cos\sigma_1\operatorname{sen}\omega X \end{cases}$$

e analogamente per Y_1, Z_1 ecc.

II.

Teorema di permutabilità.

« Se S_1, S_2 sono due superficie pseudosferiche legate alla medesima superficie pseudosferica S da due trasformazioni di Bäcklund B_{σ_1}, B_{σ_2}, con costanti diverse σ_1, σ_2, esiste una quarta superficie pseudosferica S_3 legata rispettivamente alle S_1, S_2 da trasformazioni di Bäcklund B'_{σ_2}, B'_{σ_1} colle costanti σ_2, σ_1 [1].

« È chiaro che dalla superficie S si perviene alla finale S_3 sia facendo prima la trasformazione B_{σ_1}, indi la B'_{σ_2} sia eseguendo prima la B_{σ_2}, indi la B'_{σ_1}; onde il nome di *teorema di permutabilità*.

« Per dimostrarlo riportiamo le formole del numero precedente applicate alle due superficie S_1, S_2 e cioè:

$$(8)\quad \begin{aligned} x_1&=x+\cos\sigma_1(\operatorname{sen}\omega_1 X'+\cos\omega_1 X''), \\ x_2&=x+\cos\sigma_2(\operatorname{sen}\omega_2 X'+\cos\omega_2 X'') \end{aligned}$$

colle analoghe in y_1, z_1.... ove fra ω_1, ω; ω_2, ω sussistono le rispettive relazioni

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_1-\omega)}{\partial u}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\operatorname{sen}(\omega_1+\omega), \\ \dfrac{\partial(\omega_1+\omega)}{\partial v}=\dfrac{1-\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\operatorname{sen}(\omega_1-\omega), \end{cases}$$

$$(9^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_2-\omega)}{\partial u}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2}\operatorname{sen}(\omega_2+\omega), \\ \dfrac{\partial(\omega_2+\omega)}{\partial v}=\dfrac{1-\operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2}\operatorname{sen}(\omega_2-\omega). \end{cases}$$

[1] Nel caso particolare, in cui una delle due trasformazioni B_{σ_1} B_{σ_2} sia a costante σ nulla, questa proprietà fu già da me osservata nel T. XIV degli Annali di matematica.

« Nell' ipotesi dell'esistenza della quarta superficie S_3, come viene asserita del teorema, distinguiamo per questa superficie tutte le quantità relative coll'apposizione dell' indice 3. Essendo allora S_3 legata alla S_1 da una trasformazione B'_{σ_2}, dovremo avere, per le (5) (7):

$$\begin{aligned} x_3 = x_1 &+ \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\omega_3 \Big\{ (\operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\omega_1 \cos\omega) X' + \\ &+ (\cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega) X'' + \cos\sigma_1 \cos\omega X \Big\} + \\ &+ \cos\sigma_2 \cos\omega_3 \Big\{ (\operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega + \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega) X' + \\ &+ (\cos\omega_1 \cos\omega - \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega) X'' - \cos\sigma_1 \operatorname{sen}\omega X \Big\}. \end{aligned}$$

« Poichè d'altronde la S_3 si ottiene dalla S_2 con una trasformazione B'_{σ_1}, sarà altresì:

$$\begin{aligned} x_3 = x_2 &+ \cos\sigma_1 \operatorname{sen}\omega_3 \Big\{ (\operatorname{sen}\omega_2 \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\sigma_2 \cos\omega_2 \cos\omega) X' + \\ &+ (\cos\omega_2 \operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}\omega_2 \cos\omega) X'' + \cos\sigma_2 \cos\omega X \Big\} + \\ &+ \cos\sigma_1 \cos\omega_3 \Big\{ (\operatorname{sen}\omega_2 \cos\omega + \operatorname{sen}\sigma_2 \cos\omega_2 \operatorname{sen}\omega) X' + \\ &+ (\cos\omega_2 \cos\omega - \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}\omega_2 \operatorname{sen}\omega) X'' - \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\omega X \Big\}. \end{aligned}$$

« Dal paragone delle due espressioni di x_3, tenendo conto delle (8), deduciamo:

$$\begin{aligned} &\cos\sigma_1 \operatorname{sen}\omega_1 + \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\omega_3 (\operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\omega_1 \cos\omega) + \\ &\quad + \cos\sigma_2 \cos\omega_3 (\operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega + \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega) = \\ &\quad = \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\omega_2 + \cos\sigma_1 \operatorname{sen}\omega_3 (\operatorname{sen}\omega_2 \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\sigma_2 \cos\omega_2 \cos\omega) + \\ &\quad + \cos\sigma_1 \cos\omega_3 (\operatorname{sen}\omega_2 \cos\omega + \operatorname{sen}\sigma_2 \cos\omega_2 \operatorname{sen}\omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cos\sigma_1 \cos\omega_1 + \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\omega_3 (\cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega) + \\ &\quad + \cos\sigma_2 \cos\omega_3 (\cos\omega_1 \cos\omega - \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega) = \\ &\quad = \cos\sigma_2 \cos\omega_2 + \cos\sigma_1 \operatorname{sen}\omega_3 (\cos\omega_2 \operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}\omega_2 \cos\omega) + \\ &\quad + \cos\sigma_1 \cos\omega_3 (\cos\omega_2 \cos\omega - \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}\omega_2 \operatorname{sen}\omega). \end{aligned}$$

« Queste moltiplicate una prima volta per $\operatorname{sen}\omega_1$, $\cos\omega_1$, una seconda volta per $\operatorname{sen}\omega_2$, $\cos\omega_2$ e ogni volta sommate, danno le due equazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} &\cos\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}(\omega_2 - \omega_1) \operatorname{sen}(\omega_3 - \omega) + \Big[\cos\sigma_1 \cos(\omega_2 - \omega_1) - \\ &\qquad - \cos\sigma_2\Big] \cos(\omega_3 - \omega) = \cos\sigma_1 - \cos\sigma_2 \cos(\omega_2 - \omega_1) \\ &- \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}(\omega_3 - \omega) \operatorname{sen}(\omega_3 - \omega) + \Big[\cos\sigma_2 \cos(\omega_2 - \omega_1) - \\ &\qquad - \cos\sigma_1\Big] \cos(\omega_3 - \omega) = \cos\sigma_2 - \cos\sigma_1 \cos(\omega_2 - \omega_1) \end{aligned} \right.$$

e risolute rapporto a $\operatorname{sen}(\omega_3 - \omega)$, $\cos(\omega_3 - \omega)$ danno:

$$(10) \begin{cases} \operatorname{sen}(\omega_3 - \omega) = \dfrac{(\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\sigma_2)\operatorname{sen}(\omega_2 - \omega_1)}{\cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos(\omega_2 - \omega_1) + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2 - 1}, \\ \cos(\omega_3 - \omega) = \dfrac{\cos\sigma_1\cos\sigma_2 + (\operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2 - 1)\cos(\omega_2 - \omega_1)}{\cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos(\omega_2 - \omega_1) + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2 - 1}. \end{cases}$$

« Le ultime due sono compatibili perchè la somma dei quadrati dei secondi membri dà identicamente l'unità e possono compendiarsi nell'unica formola

$$(11) \qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\omega_3 - \omega}{2}\right) = \frac{\cos\left(\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)} \operatorname{tang}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right).$$

III.

Verifica.

« Il teorema enunciato sarà dimostrato quando si provi che l'angolo ω_3, definito dalla formola (11) ora trovata, soddisfa alle equazioni

$$(12) \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_3 - \omega_1)}{\partial u} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2} \operatorname{sen}(\omega_3 + \omega_1) \\ \dfrac{\partial(\omega_3 + \omega_1)}{\partial v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2} \operatorname{sen}(\omega_3 - \omega_1) \end{cases}$$

$$(12^*) \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_3 - \omega_2)}{\partial u} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1} \operatorname{sen}(\omega_3 + \omega_2) \\ \dfrac{\partial(\omega_3 + \omega_2)}{\partial v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1} \operatorname{sen}(\omega_3 - \omega_2), \end{cases}$$

le quali esprimono appunto che la S_3 è una superficie pseudosferica legata alla S_1 da una trasformazione B'_{σ_2} e alla S_2 da una trasformazione B'_{σ_1}.

« Ora poniamo per un momento

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial(\omega_3 - \omega_1)}{\partial u} - \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2} \operatorname{sen}(\omega_3 + \omega_1), \\ \beta = \dfrac{\partial(\omega_3 - \omega_2)}{\partial u} - \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1} \operatorname{sen}(\omega_3 + \omega_2), \\ \gamma = \dfrac{\partial(\omega_3 + \omega_1)}{\partial v} - \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2} \operatorname{sen}(\omega_3 - \omega_1), \\ \delta = \dfrac{\partial(\omega_3 + \omega_2)}{\partial v} - \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1} \operatorname{sen}(\omega_3 - \omega_2). \end{cases}$$

Osservando le (9), (9*), troviamo:

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha - \beta &= \frac{1+\operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2}\operatorname{sen}(\omega_2+\omega) - \frac{1+\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\operatorname{sen}(\omega_1+\omega) + \\
&+ \frac{1+\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\operatorname{sen}(\omega_3+\omega_2) - \frac{1+\operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2}\operatorname{sen}(\omega_3+\alpha_1) \\
\gamma - \delta &= \frac{1-\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\operatorname{sen}(\omega_1-\omega) - \frac{1-\operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2}\operatorname{sen}(\omega_2-\omega) + \\
&+ \frac{1-\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\operatorname{sen}(\omega_3-\omega_2) - \frac{1-\operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2}\operatorname{sen}(\omega_3-\omega_1).
\end{aligned}\right.$$

I secondi membri di queste eguaglianze si riscontrano identicamente nulli a causa delle (10). Derivando ora le due identità

$$\alpha - \beta = 0 \qquad \gamma - \delta = 0$$

la 2ª rapporto ad u, la 1ª rapporto a v ed osservando le identità stesse risulta

$$\frac{1-\operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2}\cos(\omega_1-\omega_3)\,.\,\alpha - \frac{1-\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\cos(\omega_3-\omega_2)\,.\,\beta = 0$$

$$\frac{1+\operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2}\cos(\omega_3+\omega_1)\,.\,\gamma - \frac{1+\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\cos(\omega_3+\omega_2)\,.\,\delta = 0.$$

Queste combinate colle identità $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ dimostrano che si avrà

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0,$$

purchè non sia

$$\frac{1-\operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2}\cos(\omega_3-\omega_1) = \frac{1-\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\cos(\omega_3-\omega_2)$$

nè

$$\frac{1+\operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2}\cos(\omega_3+\omega_1) = \frac{1+\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\cos(\omega_3+\omega_2).$$

Ma se da ciascuna di queste ultime supposta verificata, eliminiamo ω_3, servendoci delle (10), troviamo ogni volta una relazione *non identica* fra ω, ω_1, ω_2, ciò che è inamissibile, poichè, fissata la soluzione ω, le nuove soluzioni ω_1 ω_2 definite dalle (9) (9*) contengono ciascuna un' effettiva costante arbitraria. Sussistono adunque le (12) (12*) e il teorema di permutabitità risulta così dimostrato (1).

Non tralascieremo di osservare che quattro punti qualunque corrispondenti sulle quattro superficie pseudosferiche S, S_1, S_2, S_3 determinano i vertici di un quadrilatero sghembo in cui due lati opposti conservano la lunghezza costante $\cos\sigma_1$ e gli altri due la lunghezza $\cos\sigma_2$, mentre due lati concorrenti in uno qualunque dei vertici giacciono ogni volta nel piano tangente della corrispondente superficie.

(1) Senza ricorrere a questa considerazione e molto più direttamente si dimostrano le (12) (12*) (come ho osservato dopo la stampa della presente nota) derivando la (11) rispetto ad u, v e combinando covenientemente le equazioni così ottenute colle (9) (9*) (10).

IV.

Applicazione successiva della trasformazione di Bäcklund.

« Dal teorema di permutabilità discende facilmente l'altro:

« Se di una superficie pseudosferica S si conoscono tutte le trasformate di Bäcklund, per ogni superficie derivata si potranno altresì determinare con soli calcoli algebrici e di derivazione tutte le trasformate di Bäcklund.

« Supponiamo infatti di avere integrate le equazioni generalizzate di Darboux.

$$(13)\quad \frac{\partial(\varphi-\omega)}{\partial u}=\frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}(\varphi+\omega)\,,\quad \frac{\partial(\varphi+\omega)}{\partial v}=\frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}(\varphi-\omega)$$

pel valore generico di σ e di aver quindi trovato la soluzione

$$\varphi\,(u, v, \sigma, \mathrm{C})$$

della equazione fondamentale (2) colle due costanti arbitrarie σ, C.

« Sia S_1 una trasformata di Bäcklund della S corrispondente alla soluzione

$$\omega_1=\varphi\,(u\,,v\,,\sigma_1\,,\mathrm{C}_1)$$

e Σ una trasformata di S_1 colla trasformazione generica B_σ. Indicando con Ω la soluzione della (2) corrispondente a Σ e facendo uso delle (11) avremo

$$(14)\qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)=\frac{\cos\left(\dfrac{\sigma_1+\sigma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sigma_1+\sigma}{2}\right)}\operatorname{tang}\left(\frac{\omega_1-\varphi\,(u\,,v\,,\sigma\,,\mathrm{C})}{2}\right);$$

queste formole ci determinerà in termini finiti le superficie Σ, escluso il caso che si abbia $\sigma=\sigma_1$.

« Ma anche per quest'ultimo caso possiamo facilmente conseguire lo stesso scopo. Immaginiamo infatti che nella funzione

$$\varphi\,(u\,,v\,,\sigma\,,\mathrm{C})$$

si faccia convergere σ verso σ_1 e si assuma per C una tale funzione, del resto arbitraria, di σ che C converga contemporaneamente verso C_1 e in conseguenza φ verso ω_1. Al limite per $\sigma=\sigma_1$ il 2° membro della (14) si presenta sotto forma indeterminata; ma, se facciamo uso delle ordinarie regole, troviamo

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)=\cos\sigma_1\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{C}}\,\frac{d\mathrm{C}}{d\sigma}\right]_{\sigma=\sigma_1}.$$

« E poichè $\left(\dfrac{d\mathrm{C}}{d\sigma}\right)_{\sigma=\sigma_1}$ è evidentemente una nuova costante arbitraria C′, ne risulta definita la più generale trasformata di Bäcklund della S_1 colla trasformazione B_{σ_1} mediante la formola

$$(15)\qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)=\cos\sigma_1\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{C}}\cdot\mathrm{C}'\right]_{\sigma=\sigma_1},$$

che contiene appunto la nuova costante arbitraria C′.

« Ottenuta questa formola complementare, è del resto facile verificarla direttamente; ciò si ottiene derivando le (13) rapporto a σ e confrontando le formole così ottenute con quelle che definiscono Ω.

« Indipendentemente dagli esempi effettivi che si daranno nell'ultimo paragrafo, osserveremo che il teorema dimostrato circoscrive esattamente il campo delle funzioni, che si presentano nella applicazione successiva ed illimitata delle trasformazioni di Bäcklund, partendo da una determinata superficie pseudosferica. Tale campo è infatti perfettamente definito dalla *prima* equazione del tipo di Riccati che si incontra nell'applicazione del metodo [1]. Le successive equazioni di Riccati sono tutte integrate insieme colla prima e non modificano il campo stesso.

V.

Equazione delle geodetiche.

« L'ulteriore teorema enunciato nella prefazione, che cioè sopra ciascuna superficie S_n del gruppo derivato si può determinare l'equazione in termini finiti delle linee geodetiche senza alcun calcolo d'integrazione, è una semplice conseguenza dei risultati generali sopra esposti. E in fatti se chiamiamo ω_n la soluzione dell'equazione fondamentale (2) corrispondente alla S_n, potremo, per quanto precede, determinare con calcoli algebrici e di derivazione la soluzione più generale φ del sistema

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi-\omega_n)}{\partial u}&=\operatorname{sen}(\varphi+\omega_n)\\ \frac{\partial(\varphi+\omega_n)}{\partial v}&=\operatorname{sen}(\varphi-\omega_n).\end{aligned}\right.$$

« Questa è una funzione $\varphi(u, v, C)$ contenente una costante arbitraria C. Derivando le precedenti *rispetto a* C e ponendo

$$\psi=\log\frac{\partial\varphi}{\partial C}$$

troviamo:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=\cos(\varphi+\omega_n)\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial v}=\cos(\varphi-\omega_n)\,,$$

onde segue che la funzione ψ contenente la costante *non additiva* C è un integrale dell'equazione a derivate parziali

$$\Delta_1\psi=1\,,$$

ove

$$\Delta_1\psi=\frac{1}{\operatorname{sen}^2(2\omega_n)}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2-2\cos 2\omega_n\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right\}$$

[1] Scrivendo le (13) come un'unica equazione a differenziali totali, assumendo come funzione incognita $\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)$, si ha appunto l'equazione di Riccati qui accennata.

è il parametro differenziale primo della ψ calcolato rispetto all'elemento lineare

$$ds_n^2 = du^2 + 2\cos 2\omega_n\, du\, dv + dv^2$$

della superficie S_n. Per note proprietà dell'equazione delle geodetiche [1] segue che l'equazione in termini finiti delle geodetiche sulle S_n è data da $\frac{\partial\psi}{\partial C} = C'$. Abbiamo dunque il teorema che si voleva stabilire: L'equazione in termini finiti delle geodetiche sulla S_n è dalla relazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial C^2} = C' \frac{\partial\varphi}{\partial C},$$

ove C' è una nuova costante arbitraria.

VI.

Esempio.

« Partiamo dalla soluzione evidente $\omega = o$ della (2) e prendendo

$$\begin{array}{lll} x = o & y = o & z = u + v \\ X = \cos(u - v)\,, & Y = \operatorname{sen}(u - v)\,, & Z = o \\ X' = -\operatorname{sen}(u - v)\,, & Y' = \cos(u - v)\,, & Z' = o \\ X'' = o & ,\ Y'' = o & ,\ Z'' = 1\,, \end{array}$$

risulteranno soddisfatte le (3) (4); potremo quindi applicare il metodo generale anche in questo caso, ove soltanto si presenta la particolarità che la superficie iniziale S si riduce all'asse z. Le equazioni (13) danno qui per l'integrale generale

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = e^{\alpha}\,,\ \text{con}\ \alpha = \frac{u + v + \operatorname{sen}\sigma\,(u - v)}{\cos\sigma} + C\,;$$

sostituendo nelle (5) vediamo che le superficie derivate sono elicoidi del Dini, aventi cioè per profilo meridiano una trattrice che ha l'asse dell'elicoide per assintoto. Nel caso particolare $\sigma = o$ si ha la pseudosfera.

« Se prendiamo una particolare elicoide

$$\operatorname{tang}\frac{\omega_1}{2} = e^{\alpha_1}\,,\ \alpha_1 = \frac{u + v + \operatorname{sen}\sigma\,(u - v)}{\cos\sigma} + C_1\,,$$

avremo, per la (14), la trasformata generica di Bäcklund della S_1 colla trasformazione B_σ dalla formola

$$\operatorname{tang}\frac{\Omega}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}\right)}\,\frac{e^{\alpha_1} - e^{\alpha}}{1 + e^{\alpha + \alpha_1}}\,. \tag{16}$$

[1] Vedi p. e. Darboux *Leçons* T. II, pag. 429.

« Nel caso particolare $\sigma = \sigma_1$ adopereremo invece la (15), che dà

$$(16^*) \qquad \operatorname{tang} \frac{\Omega}{2} = \frac{u - v + \operatorname{sen} \sigma_1 (u + v) + C'}{\cos \sigma_1 \cosh \alpha_1} .$$

« Se prendiamo ad esempio due particolari superficie (16) corrispondenti alle formole

$$\operatorname{tang} \frac{\Omega'}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma'}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma'}{2}\right)} \frac{e^{\alpha_1} - e^{\alpha'}}{1 + e^{\alpha_1 + \alpha'}}, \quad \operatorname{tang} \frac{\Omega''}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma''}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma''}{2}\right)} \frac{e^{\alpha_1} - e^{\alpha''}}{1 + e^{\alpha_1 + \alpha''}}$$

ove σ', σ'' sono due costanti arbitrarie diverse fra loro e da σ_1 ed applichiamo nuovamente la (14) troveremo:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\Omega - \omega_1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\sigma' + \sigma''}{2}\right) \left[\frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma'}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma'}{2}\right)} \left(e^{\alpha_1} - e^{\alpha'}\right)\left(1 + e^{\alpha_1 + \alpha''}\right) - \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma''}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma''}{2}\right)} \left(e^{\alpha_1} - e^{\alpha''}\right)\left(1 + e^{\alpha_1 + \alpha'}\right) \right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma' - \sigma''}{2}\right) \left(1 + e^{\alpha_1 + \alpha'}\right)\left(1 + e^{\alpha_1 + \alpha''}\right) + \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma'}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma''}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma'}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma''}{2}\right)} \left(e^{\alpha_1} - e^{\alpha'}\right)\left(e^{\alpha_1} - e^{\alpha''}\right)}$$

che ci definirà le trasformate di Bäcklund delle (16). Potremo per tal modo proseguire indefinitamente senza alcun calcolo d'integrazione. In ciascuna superficie del gruppo infinito, che così si ottiene partendo dalle elicoidi del Dini, le coordinate correnti di un punto mobile sulla superficie si esprimono evidentemente per funzioni ordinarie, circolari ed esponenziali, dei parametri u, v delle linee assintotiche. Si osserverà che l'esistenza di un tale gruppo di superficie pseudosferiche, dipendenti unicamente da funzioni ordinarie, non era *a priori* evidente. Terminerò coll'osservare che il teorema di permutabilità vale non solo per le superficie pseudosferiche isolate, ma ben anche pei *sistemi tripli ortogonali di Weingarten* [1]. Ma di ciò mi riserbo di trattare in una prossima Nota ».

[1] Vedi la mia Memoria nel T. XIII degli Annali di matematica.