ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

e trasformarlo in aldeide formica. Questo modo di decomposizione dobbiamo dunque rappresentarlo coll'equazione

$$\left(C^3\begin{array}{l} \diagup CH^2 \\ -CH^3 \\ \diagdown\!\!\diagdown C^2H^5 \\ \diagdown N^2C^6H^5 \end{array} HCl\right)^2 PtCl^4 + 2O = 2CH^2O + 4HCl + \left(C^3\begin{array}{l} \diagup CH^3 \\ -C^3H^5 \\ \diagdown\!\!\diagdown N^2C^6H^5 \end{array}\right)^2 PtCl^2$$

« È molto probabile che quest'assorbimento di ossigeno abbia luogo sotto l'influenza di una piccolissima quantità di platino, molto diviso, che per una decomposizione profonda della molecola si genera in prima fase, ed in appoggio a ciò sta il fatto che nelle diverse analisi del dicloroplatopirrazolo ho sempre trovato una quantità di platino un po' maggiore di quella richiesta dalla teoria.

	trovato			calcolato
Pt	31,47	30,75	30,81	30,58

« Nel terminare debbo esprimere i miei ringraziamenti al sig. G. De-Sanctis studente in questo laboratorio, che mi aiutò efficacemente nelle sopradescritte ricerche ».

Matematica. — *Ricerche sugli aggruppamenti formati colle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine.* Nota II. di Ernesto Pascal, presentata dal Socio Cremona.

« Questa Nota è la continuazione di quella che ho già avuto occasione di presentare all'Accademia (1). Nella prima Nota io mi sono fermato alle coppie di coniche *esterne* l'una all'altra, cioè non incontrantesi sulla curva di 4° ordine. Ho trovato che esistono due specie distinte di tali coppie, caratterizzate da proprietà geometriche assai singolari. In questa Nota mi propongo di classificare le varie specie di terne di coniche.

§ 4. — Gruppo di sostituzioni corrispondenti alla coppia di 1ª specie.

« Abbiamo già studiato il gruppo delle sostituzioni che lasciano inalterata una delle 315 coniche. Supponiamo ora che debba restar fissa anche un'altra conica formante colla prima una coppia di 1ª specie. Allora si ha un sottogruppo di ordine $\frac{9.8.8.8}{18} = 4.8.8$, e l'ordine diventerà poi doppio se noi vogliamo che le due coniche possano anche scambiarsi fra loro, cioè vogliamo propriamente il gruppo corrispondente alla coppia.

(1) V. pag. 385.

Se le due coniche sono, come nella Nota precedente,

$$a \equiv (12 \,.\, 23 \,.\, 34 \,.\, 41) \ , \ b \equiv (13 \,.\, 24 \,.\, 56 \,.\, 78)$$

e debbono restar fisse, allora resterà fisso il primo dei sistemi d'imprimitività corrispondente alla prima conica (v. § 2).

I sistemi d'imprimitività corrispondenti alle due coniche sono rispettivamente:

$$a.\left\{\begin{array}{l} 13.24 \ , \ 56.78 \ , \ 57.68 \ , \ 58.67 \\ 15.35 \ , \ 16.36 \ , \ 17.37 \ , \ 18.38 \\ 25.45 \ , \ 26.46 \ , \ 27.47 \ , \ 28.48 \end{array}\right. \qquad b.\left\{\begin{array}{l} 12.34 \ , \ 14.23 \ , \ 57.68 \ , \ 58.67 \\ 15.36 \ , \ 16.35 \ , \ 27.48 \ , \ 28.47 \\ 25.46 \ , \ 26.45 \ , \ 17.38 \ , \ 18.37 \end{array}\right.$$

e da essi si scorge subito che restando fisse le due coniche, ne resta fissa una terza che forma coppia di prima specie con ciascuna delle due date, e che è

$$c \equiv (57 \,.\, 68 \,.\, 58 \,.\, 67).$$

Possiamo dunque intanto dire:

Una coppia di 1ª specie di coniche ne individua una terza esterna ad esse, che chiameremo *coniugata* alla coppia.

La tabella dei sistemi d'imprimitività corrispondenti a c è:

$$c.\left\{\begin{array}{l} 12.34 \ , \ 14.23 \ , \ 13.24 \ , \ 56.78 \\ 15.16 \ , \ 35.36 \ , \ 25.26 \ , \ 45.46 \\ 17.18 \ , \ 37.38 \ , \ 27.28 \ , \ 47.48 \end{array}\right.$$

Si vede intanto che nel gruppo che lascia fisse le due coniche date si stabiliscono quattro sistemi d'imprimitività, cioè:

$$\begin{array}{c} 15 \,.\, 35 \,.\, 16 \,.\, 36 \\ 17 \,.\, 37 \,.\, 18 \,.\, 38 \\ 25 \,.\, 45 \,.\, 26 \,.\, 46 \\ 27 \,.\, 47 \,.\, 28 \,.\, 48 \end{array}$$

che esauriscono tutte le 16 rette esterne alle tre coniche $a.\ b.\ c.$

È facile vedere che fra questi quattro sistemi sono possibili solo quattro sostituzioni nel caso in cui le tre coniche sono, ciascuna, fisse. Infatti se uno di essi è fisso, resteranno fissi tutti gli altri. Queste quattro sostituzioni sono le solite quattro note sostituzioni del gruppo *quadruplo* di 4 elementi (quello chiamato *vierergruppe*), cioè chiamando $s_1\, s_2\, s_3\, s_4$ i quattro sistemi, le sostituzioni sono:

$$s \equiv [1 \ , \ (s_1 s_2)\ (s_3 s_4) \ , \ (s_1 s_3)\ (s_2 s_4) \ , \ (s_1 s_4)\ (s_2 s_3)].$$

Se i quattro sistemi debbono restar fissi, allora le sostituzioni saranno solo in numero di $4 \,.\, 4 \,.\, 4\,.$, e possiamo rappresentare in modo facile queste 64 sostituzioni, combinando il gruppo quadruplo delle 4 rette di a con quello delle 4 rette di b e con quello delle 4 rette di c. In effetti dalle cose dette nella Nota precedente risulta che lasciando fissa la retta (13) della conica b e volendo che sieno fissi i sistemi relativi alle tre coniche, il gruppo risulta solo di quattro permutazioni fra i punti 1, 2, 3, 4, e di altre quattro fra i punti 5, 6, 7, 8, ed è inoltre transitivo fra le quattro rette della conica a, ed anche fra le quattro rette di c, e questa seconda transitività è indipendente dalla prima. A causa della simmetria colla quale compariscono a b c si capisce allora che il gruppo deve essere transitivo separatamente nelle quattro rette di a, b, c, e in ciascuna di queste quaterne si possono operare quattro sostituzioni. Si hanno precisamente le $4 . 4 . 4 . = 64$ sostituzioni che debbono ritrovarsi. Ogni retta di a con ogni retta di b e con ogni retta di c forma una terna pari; ora in ciascuno dei quattro sistemi esiste una sola retta che con una qualunque di queste terne dia luogo ad una quaterna in cui tutte le terne sono pari, come è agevole verificare. Quindi si vede che stabilita la permutazione fra le rette di a, b, c resta stabilita quella fra le rette di qualunque altro sistema.

« Con questi cenni riguardanti la formazione del gruppo relativo alla coppia data, possiamo passare a considerare la equivalenza o no delle coniche *esterne* alle date.

§ 5. — Coniche esterne a quelle di una coppia di 1ª specie.

« Esistono 77 coniche esterne alle due date a, b; ed esse si possono costruire e raggruppare fra loro tenendo presente il quadro dei sistemi d'imprimitività.

1. conica $c \equiv (57 . 68 . 58 . 67)$

2. coniche formate con due rette di c come p. es.:

$$(57 . 58 . 17 . 18) \equiv c_1$$

« Queste sono tutte fra loro equivalenti e sono in numero di 16.

3. coniche formate colle quattro rette di uno dei sistemi d'imprimitività, p. es.:

$$(15 . 35 . 16 . 36) \equiv c_2$$

« Queste sono in numero di 4, e fra loro equivalenti.

4. coniche formate con due rette del primo sistema e due del secondo, ovvero due del 3° sistema e due del 4°, come p. es.:

$$(15 . 35 . 17 . 37) \equiv c_3$$

« Queste coniche formano coppia di 1ª specie colla prima delle date, e coppia di 2ª specie colla 2ª delle date. Di esse ve ne sono 8. Ve ne sono poi altrettante formate con due rette del 1° sistema e due del 4°, o due rette del 2° e due del 3°. Queste debbono ritenersi equivalenti alle prime se le due coniche date possono permutarsi fra loro. In tutto ve ne sono 16.

5. coniche formate con due rette del 1° sistema e due del 3°, o due del 2° e due del 4°. Come p. es.:

$$(15 . 16 . 25 . 26) \equiv c_4$$

« Di esse ve ne sono 8, ed esse formano coppia di 2^a specie con a, b, mentre formano coppia di 1^a specie con c.

6. coniche formate con una retta di ciascuno dei quattro sistemi. P. es.:

$$(15 \,.\, 17 \,.\, 25 \,.\, 27) \equiv c_5$$

e di queste ve ne sono 32 fra loro equivalenti. Esse formano coppia di 2^a specie con a, b, c.

« Possiamo dunque dire:

« Il gruppo di sostituzioni che lascia fissa una coppia di 1^a specie, non « è transitivo in tutte le altre coniche esterne, ma le separa in

$$1 + 16 + 4 + 16 + 8 + 32 \text{ ».}$$

« Aggiungendo alla coppia data una conica di ciascuno di questi gruppi abbiamo sei diverse specie di terne contenenti una coppia di 1^a specie. Dimostreremo che queste terne sono tutte fra loro distinte, e intanto tenendo presenti i risultati ultimamente ottenuti possiamo dire.

« Rispetto ad una terna fondamentale come $a \,.\, b \,.\, c$ non esistono coniche, « formanti coppia di 2^a specie con una sola di queste e coppie di 1^a specie « colle altre due.

« Esistono 6 diverse specie di terne di coniche esterne l'una all'altra « contenenti *almeno una coppia di 1^a specie*.

« Queste sei terne possono essere rappresentate rispettivamente dalle:

« $a\,,b\,,c$; $a\,,b\,,c_1$; $a\,,b\,,c_2$; $a\,,b\,,c_3$; $a\,,b\,,c_4$; $a\,,b\,,c_5$

« Le chiameremo rispettivamente di 1^a, 2^a, ... 6^a specie, e ne esistono « rispettivamente

« $\dfrac{315.9}{3} = 945$, $315.9.16 = 45360$, $\dfrac{315.9.4}{3} = 3780$, $\dfrac{315.9.16}{2} = 22680$

« $315.9.8 = 22680$, $315.9.32 = 90720$.

« La prima e la terza contengono tutte coppie di 1^a specie, la quarta « contiene due coppie di 1^a specie ed una di 2^a, e finalmente le altre (2^a, « 5^a, 6^a) contengono una coppia di 1^a specie e le altre di 2^a specie ».

« Come si vede, queste proprietà non possono bastare per differenziare fra loro le 6 diverse specie di terne.

« Dobbiamo quindi passare a ricercare le proprietà di queste diverse terne analogamente a ciò che abbiamo fatto per le coppie, nella Nota precedente.

§ 6. — Proprietà geometriche delle terne di coniche contenenti tutte coppie di 1^a specie.

« Abbiamo visto nel § precedente che vi sono due specie diverse di terne di coniche contenenti tutte coppie di 1^a specie, ed esse sono rappresentate dalle due terne:

$$a\,,b\,,c \quad ; \quad a\,,b\,,c_2.$$

« Ora passando ad esaminare le rette di cui risulta la terna $a.b.c$ (quella che possiamo chiamare *fondamentale*) si vede che una retta di a con una di b e con una di c dà sempre una terna pari di rette (v. Mem. cit.), e ciò corrisponde al fatto geometrico:

« La terna fondamentale (di 1ª specie) risulta di tali tre coniche che « non esiste altra conica (fra le 315) che tagli contemporaneamente le tre date « (si intende, sulla curva del 4° ordine) ».

« Invece questo non si verifica per la terna $a\,b\,c_2$. In questo caso si può subito riconoscere che si possono formare delle quaterne-zero contenenti una retta di a, una di b, ed una di c_2, e propriamente di tali quaterne se ne possono formare 32; dunque:

« Esistono 32 coniche (fra le 315) che intersecano (sulla curva di 4° « ordine) in *due* soli punti ciascuna delle tre coniche a, b, c_2 di una terna « di 3ª specie. Non esistono coniche intersecanti in 4 punti una delle date « e in 2 punti le altre due ».

« Sappiamo che ogni coppia di 1ª specie determina una conica coniugata ad essa. Troviamo le coniche coniugate a ciascuna delle tre coppie della terna che ci occupa.

« Adoperando i quadri del § 4 si ottengono facilmente le tre coniche:

$$(27.48.28.47)$$
$$(17.37.18.38)$$
$$(57.68.58.67)$$

che, come si vede (tenendo p. es. presente il quadro c del § 4), formano una terna di 1ª specie.

« Dunque abbiamo questo rimarchevole risultato:

« In una terna di 3ª specie, prendendo le coniche coniugate alle tre « coppie contenutevi, esse formano una terna fondamentale di 1ª specie ».

« Questo risultato ricorda quello relativo alla configurazione delle 27 rette della superficie di 3° ordine, laddove si studia gli assiemi di piani non aventi rette in comune (della superficie). Anche ivi si trova che i piani coniugati alle coppie contenute in un triedro di 2ª specie, costituiscono un triedro di 3ª specie [1].

§ 7. — Proprietà geometriche delle tre terne di coniche contenenti una coppia di 1ª specie e due di 2ª.

« Abbiamo già detto che esistono tre di queste terne e sono rappresentate da:

$$a\ ,\ b\ ,\ c_1\ ,$$
$$a\ ,\ b\ ,\ c_4\ ,$$
$$a\ ,\ b\ ,\ c_5\ ,$$

(1) Vedi Mem. II. negli Annali di matematica, t. XX, 1892.

« Una prima differenza caratteristica fra queste tre terne l'abbiamo implicitamente già notata. Infatti consideriamo l'unica coppia di 1ª specie esistente in queste terne, e la conica c coniugata a questa coppia. Dalle cose dette nel § 5 risulta che nella terna a, b, c_1, la 3ª conica c_1 passa per quattro punti (sulla curva di 4° ordine) della conica coniugata c; nella terna a, b, c_4, la terza conica c_4 forma coppia di 1ª specie con c; e finalmente nella terna a, b, c_5, la terza conica c_5 forma coppia di 2ª specie con c.

« Possiamo ancora trovare delle proprietà geometriche delle varie terne.

« Le tre coniche della prima terna sono rappresentate da:

$$(12 . 23 . 34 . 41) \quad (13 . 24 . 56 . 78) \quad (57 . 58 . 17 \; 18)$$

« Ora si vede che le rette 57 . 58 combinate con due qualunque delle prime due quaterne, danno sempre una terna *pari* di rette, mentre che (17) combinato p. es. con (12) (24) dà una terna *dispari*, dunque:

« Nella terna di coniche a, b, c_1 (di 2ª specie), esistono 16 coniche che « *tagliano* in 2 punti ciascuna delle tre date, e di esse 8 passano sempre « per gli stessi due punti, e le altre 8 passano per altri due punti fissi « (s'intende, sempre sulla curva del 4° ordine) ».

« Non esistono coniche incontranti in *due* punti due delle date e in « *quattro* la terza ».

« La terna di 5ª specie è rappresentata da

$$(12 . 23 . 34 . 41) \quad (13 . 24 . 56 . 78) \quad (15 . 16 . 25 . 26)$$

« Ora si vede subito che si possono formare 8 quaterne-zero con una retta della prima, una della seconda, e *due* della terza, così per es. le quaterne:

$$(12 . 56 . 15 . 26) \quad (12 . 56 . 16 . 25) \quad (23 . 13 . 15 . 25) \quad (23 . 13 . 26 . 16) \text{ ecc. ecc.}$$

e inoltre si possono formare 16 quaterne con una retta della prima, una della seconda e una della terza conica, onde possiamo dire:

« Per una terna di 5ª specie esistono 8 coniche che tagliano in due punti « ciascuna di due delle date, e in 4 punti la terza, ed esistono poi 16 altre « coniche intersecanti in soli due punti ciascuna delle tre date ».

« La terna di 6ª specie è rappresentata da

$$(12 . 23 . 34 . 41) \quad (13 . 24 . 56 . 78) \quad (15 . 17 . 25 . 27)$$

e si vede che si possono formare solo 4 quaterne contenenti due rette della terza, e una retta della prima e una della seconda delle tre date. Esse sono:

$$(14 . 24 . 15 . 25) \quad (14 . 24 . 17 . 27) \quad (23 . 13 . 17 . 27) \quad (23 . 13 . 15 . 25)$$

e, come si vede, possono ordinarsi in modo che ciascuna abbia due rette comuni colla seguente e colla precedente e con nessun'altra, e l'ultima abbia due rette comuni colla prima.

« Si possono poi formare 24 coniche passanti per due punti della prima, due della seconda e due della terza. Onde:

« Per una terna di 6ª specie esistono solo 4 coniche intersecanti due « delle date in due punti, e la terza in 4 punti; ed esistono poi 24 altre « coniche intersecanti in soli 2 punti ciascuna delle date. Le prime 4 for- « mano un aggruppamento, che possiamo chiamare circolare, cioè si possono « ordinare in modo che ciascuna abbia 4 punti comuni colla seguente e colla « precedente e l'ultima colla prima ».

§ 8. — Proprietà geometrica della terna contenente due coppie di 1ª specie e una di 2ª.

« Questa terna è rappresentata da a, b, c_3, cioè:

$$(12\,.\,23\,.\,34\,.\,41)\quad(13\,.\,24\,.\,56\,.\,78)\quad(15\,.\,35\,.\,17\,.\,37)$$

e si può riconoscere facilmente che possono formarsi 32 coniche intersecanti in due punti ciascuna delle date, come per es.:

$$(12\,.\,13\,.\,35\,.\,25)\;,\;(23\,.\,56\,.\,35\,.\,26)\;,\;\text{ecc. ecc.}$$

« Rispetto alla terna di 4ª specie esistono 32 coniche che intersecano « in 2 soli punti ciascuna delle date, e non ne esistono di quelle che inter- « secano in due punti due delle date e in quattro punti la terza ».

« Questa proprietà è analoga a quella della terna di 3ª specie studiata nel § 6, ma, oltre che si potrebbe facilmente riconoscere che in questa le 32 coniche trovate, si configurano fra loro in maniera diversa che le 32 coniche del § 6, resta però sempre che la differenza fra le due terne (la 3ª e la 4ª) è data dalla diversa natura delle coppie che contengono.

« Questo è lo studio completo delle terne contenenti *almeno una coppia di 1ª specie*. In una prossima Nota considererò le terne contenenti tutte coppie di 2ª specie ».

Fisica. — *Sul punto critico e sui fenomeni che lo accompagnano*. Nota di Giulio Zambiasi, presentata dal Socio Blaserna.

« La equazione caratteristica dei fluidi nella forma datale da Van der Waals e da Clausius, è applicabile direttamente agli aeriformi, e si estende ai liquidi nella supposizione che vi sia continuità fra questi stati. Essa esige l'esistenza d'uno stato particolare e determinato, detto *critico*, in cui i volumi specifici del liquido e del suo vapore saturo sono uguali, che ha una importanza fondamentale in termodinamica, perchè coi suoi elementi critici si determinano le costanti di ciascun corpo, si costruisce la *equazione iso-*