

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCLXXXIX.
1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° SEMESTRE



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 17 luglio 1892.

Matematica. — *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili.* Nota del Corrispondente LUIGI BIANCHI.

I.

Le formole di Weingarten.

« Per l'oggetto della presente Nota occorre dapprima riassumere le formole generali relative alla teoria delle deformazioni infinitesime date da Weingarten nel volume 100 del Giornale di Crelle.

« Sia S una superficie arbitraria, riferita ad un sistema (u, v) di coordinate curvilinee. Indichiamo con x, y, z le coordinate di un punto mobile su S , con X, Y, Z i coseni di direzione della normale e poniamo

$$(1) \quad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

$$(2) \quad -(dxdX + dydY + dzdZ) = Ddu^2 + 2D' dudv + D'' dv^2.$$

« Supponiamo che la S subisca una deformazione infinitesima, che non ne cangi l'elemento lineare, e per ogni punto $P \equiv (x, y, z)$ della superficie indichiamo con

$$\varepsilon x_0, \varepsilon y_0, \varepsilon z_0,$$

ove ε è una costante infinitesima, le componenti secondo gli assi dello spostamento che riceve il punto P . La ricerca delle funzioni incognite x_0, y_0, z_0

viene ridotta da Weingarten a quella di un'unica funzione $g(u, v)$, di carattere invariante, che egli chiama la *Verschiebungsfunktion* ⁽¹⁾ e che qui diremo la *funzione caratteristica*.

* Nota la funzione g si hanno per quadratura x_0, y_0, z_0 dalle formole:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{D\left(X \frac{\partial g}{\partial v} - g \frac{\partial X}{\partial v}\right) - D'\left(X \frac{\partial g}{\partial u} - g \frac{\partial X}{\partial u}\right)}{\sqrt{eg - f^2}} \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} = \frac{D'\left(X \frac{\partial g}{\partial v} - g \frac{\partial X}{\partial v}\right) - D''\left(X \frac{\partial g}{\partial u} - g \frac{\partial X}{\partial u}\right)}{\sqrt{eg - f^2}} \end{cases}$$

e dalle analoghe per y_0, z_0 . Indicando poi con

$$g_{11}, g_{12}, g_{22}$$

le *derivate seconde covarianti* ⁽²⁾ della g rapporto alla forma differenziale (1), cioè ponendo

$$\begin{cases} g_{11} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial g}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial g}{\partial v} \\ g_{12} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial g}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial g}{\partial v} \\ g_{22} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial g}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$$

ove i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix} r_i \\ s \end{Bmatrix}'$ s'intendono calcolati per la forma differenziale (1), la funzione caratteristica g deve soddisfare alla equazione di 2° ordine

$$(4) \quad D(g_{22} + gg) - 2D'(g_{12} + fg) + D''(g_{11} + eg) = 0.$$

* Inversamente ogni soluzione g della (4) è funzione caratteristica di una deformazione infinitesima della S. Questa è un puro movimento solo quando si assuma

$$g = aX + bY + cZ,$$

con a, b, c costanti.

(1) Questa funzione g , come ha osservato il prof. Volterra, ha un significato cinematico molto semplice. Essa rappresenta la componente secondo la normale della rotazione subita da un elemento superficiale di S. Cf. la Nota di Volterra in questi Rendiconti 6 aprile 1884.

(2) Gregorio Ricci, *Derivazioni covarianti e controvarianti*. Padova, 1888.

« Per le variazioni δD , $\delta D'$, $\delta D''$ subite da D , D' , D'' dopo la deformazione, Weingarten stesso ha date le formole (1):

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta D = \frac{\varepsilon}{\sqrt{eg - f^2}} \left[D' (g_{11} + eg) - D (g_{12} + f'g) \right] \\ \delta D' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{eg - f^2}} \left[D' (g_{12} + f'g) - D (g_{22} + g'g) \right] \\ \delta D'' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{eg - f^2}} \left[-D' (g_{12} + f'g) + D'' (g_{11} + eg) \right] \\ \delta D'' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{eg - f^2}} \left[D'' (g_{12} + f'g) - D' (g_{22} + g'g) \right] \end{array} \right.$$

II.

Superficie associate.

« Consideriamo una deformazione infinitesima della superficie S , di cui g sia la funzione caratteristica. Se indichiamo con

$$\bar{g} = Xx + Yy + Zz$$

la distanza del piano tangente della superficie S dall'origine, per le formole di Weingarten relative alle coordinate tangenziali (2), si ha

$$-D = \bar{g}_{11} + e\bar{g}, \quad -D' = \bar{g}_{12} + f'\bar{g}, \quad -D'' = \bar{g}_{22} + g'\bar{g};$$

colla sostituzione di questi valori la (4) diventa

$$(4^*) \quad (\bar{g}_{11} + e\bar{g})(\bar{g}_{22} + g'\bar{g}) + (\bar{g}_{22} + g'\bar{g})(\bar{g}_{11} + e\bar{g}) - 2(\bar{g}_{12} + f'\bar{g})(\bar{g}_{12} + f'\bar{g}) = 0,$$

formola simmetrica rapporto a g , \bar{g} . Ne segue che per la superficie \bar{S} involuppo del piano

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z = g,$$

ove ξ , η , ζ indicano le coordinate correnti, la \bar{g} sarà funzione caratteristica di una deformazione infinitesima.

« Essendo poi \bar{D} , \bar{D}' , \bar{D}'' le quantità analoghe a D , D' , D'' costruite per la superficie \bar{S} , avremo

$$-\bar{D} = \bar{g}_{11} + e\bar{g}, \quad -\bar{D}' = \bar{g}_{12} + f'\bar{g}, \quad -\bar{D}'' = \bar{g}_{22} + g'\bar{g},$$

talchè la (4*) può scriversi

$$(6) \quad D\bar{D}'' + D''\bar{D} - 2D'\bar{D}' = 0,$$

(1) Sitzungsberichte der K. Akademie zu Berlin, 28 Januar, 1886.

(2) Vedi Knoblauch, *Allgemeine Theorie der krummen Flächen*, § 30.

cioè l'invariante simultaneo delle due forme differenziali

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2, \quad \bar{D} du^2 + 2\bar{D}' du dv + \bar{D}'' dv^2$$

è nullo. Le due superficie S, \bar{S} si corrispondono punto per punto per *parallelismo delle normali* e il significato geometrico della (6) consiste visibilmente in ciò che alle linee assintotiche dell'una superficie corrisponde sull'altra un sistema di linee a tangenti coniugate. Questa relazione geometrica è caratteristica delle coppie di superficie qui considerate, come si dimostra risalendo dalla (6) alla (4). Se diciamo adunque *associate* due superficie, che si corrispondano punto a punto per parallelismo delle normali, quando alle linee assintotiche della prima corrisponda sulla seconda un sistema coniugato (il che porta inversamente che alle linee assintotiche della seconda corrisponde un sistema coniugato sulla prima) abbiamo il risultato:

- In ogni coppia di superficie associate S, \bar{S} la distanza del piano tangente dell'una superficie dall'origine, è funzione caratteristica di una deformazione infinitesima dell'altra.

III.

Sistema coniugato che si conserva nella deformazione.

- Ricerchiamo ora quel sistema coniugato che dopo la deformazione infinitesima considerata della S si conserva coniugato. Esso si otterrà integrando l'equazione differenziale di 1° ordine e di 2° grado in $\frac{du}{dv}$, che risulta eguagliando a zero il Jacobiano delle due forme differenziali quadratiche

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 \\ (D + \delta D) du^2 + 2(D' + \delta D') du dv + (D'' + \delta D'') dv^2.$$

- Osservando le (5) troviamo subito per questa equazione

$$(g_{11} + \epsilon g) du^2 + 2(g_{12} + f g) du dv + (g_{22} + g g) dv^2 = 0,$$

ovvero

$$\bar{D} du^2 + 2\bar{D}' du dv + \bar{D}'' dv^2 = 0,$$

che per la superficie associata S rappresenta l'equazione differenziale delle assintotiche. Ne segue:

- In ogni coppia di superficie associate in una deformazione infinitesima, alle assintotiche dell'una corrisponde

sull'altra quel sistema coniugato, che si conserva coniugato dopo la corrispondente deformazione (1).

« Questi risultati conducono poi immediatamente a stabilire il teorema:

« Affinchè un sistema coniugato tracciato sopra una superficie S si mantenga tale in una deformazione infinitesima della superficie è necessario e sufficiente che la sua immagine sferica, fatta al modo di Gauss, sia anche l'immagine delle assintotiche di una superficie \bar{S} . Le due superficie S, \bar{S} sono allora associate nella deformazione domandata.

« In particolare se il sistema coniugato è quello delle linee di curvatura, la condizione si riduce a questo che l'immagine sferica sia formata da un sistema ortogonale isotermo e si ritrova così il risultato stabilito da Weingarten nella Nota ultimamente citata.

IV.

Formole di rappresentazione sferica.

« Dalle deformazioni infinitesime passando ora a considerare le deformazioni *finite*, che conservano coniugato un dato sistema, dimostreremo gli eleganti risultati del sig. Cosserat (2).

« Perciò conviene premettere alcune semplici formole relative alla rappresentazione sferica di un sistema coniugato (u, v) sopra una superficie S . Essendo

$$d\sigma^2 = edu^2 + 2f du dv + g dv^2$$

l'espressione dell'elemento lineare sferico rappresentativo, l'ipotesi che il sistema (u, v) sia coniugato sulla S si traduce nelle formole fondamentali

$$(7) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda \left(g \frac{\partial X}{\partial u} - f \frac{\partial X}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \mu \left(f \frac{\partial X}{\partial u} - e \frac{\partial X}{\partial v} \right)$$

e nelle analoghe per y, z , ove λ, μ sono due funzioni legate a D, D' dalle relazioni

$$D = -\lambda (eg - f^2) \quad D' = \mu (eg - f^2).$$

« Ora, se indichiamo con $\left\{ \begin{smallmatrix} r^i \\ s \end{smallmatrix} \right\}$ i simboli di Christoffel relativi all'ele-

(1) Se la forma

$$Ddu^2 + 2D' du dv + D'' dv^2$$

è definita, cioè se la S è a curvatura *positiva*, il sistema coniugato, che nella deformazione si conserva coniugato, è certamente reale, dunque:

Ogni superficie associata di una superficie a curvatura positiva è a curvatura negativa.

(2) Comptes Rendus de l'Académie, 12 et 19 octobre 1891.

mento lineare della superficie S e deriviamo la 1^a delle (7) rapporto ad u , facendo uso di note formole, troviamo

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} - \lambda (eg - f^2) X &= \lambda g \left[\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial X}{\partial v} - e X \right] - \\ - \lambda f \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial X}{\partial v} - f X \right] &+ \frac{\partial (\lambda g)}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial (\lambda f)}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}. \end{aligned}$$

• Sostituendo nel 1° membro per $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ i valori (7), risultano le due formole

$$\begin{cases} \lambda g \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \mu f \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \lambda g \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}' - \lambda f \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' + \frac{\partial (\lambda g)}{\partial u} \\ \lambda f \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \mu e \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\lambda g \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' + \lambda f \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' + \frac{\partial (\lambda f)}{\partial u}, \end{cases}$$

dalle quali, eliminando $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}$, deduciamo semplicemente

$$\mu \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \lambda \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}',$$

ovvero

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{D}{D'} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}'.$$

• In modo analogo procedendo colla seconda delle (7) derivata rapporto a v , otteniamo le formole

$$(A) \quad \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{D}{D'} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}', \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{D''}{D} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}',$$

che sono molto semplici ed utili pel nostro scopo.

• Osserviamo che se si ha $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' = 0$, $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = 0$, cioè se il sistema sferico (u, v) è l'immagine delle assintotiche di una superficie pseudosferica, ne risulta

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0 \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$$

e queste esprimono che le linee coniugate u, v sulla S sono geodetiche.

• Queste superficie, dotate di un sistema coniugato formato di linee geodetiche, furono studiate per primo da Voss (1) e posteriormente da Guichard; le diciamo *Superficie di Voss*. Come si vede, esse sono le superficie *associate* delle pseudosferiche.

(1) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu München, 1888.

V.

I teoremi di Cosserat.

« Passiamo ora a risolvere il problema: Quali sono le superficie, che possono flettersi in guisa da conservare coniugato un sistema attualmente coniugato (u, v) ?

« Mantenendo le solite notazioni, sarà $D' = 0$ e fra D, D'' sussisteranno le relazioni di Codazzi

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D = 0 \\ \frac{\partial D''}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} D - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' = 0 \end{cases}$$

« Dopo la deformazione supposta, è ancora $D' = 0$ e dovendo conservarsi, pel teorema di Gauss, invariato il prodotto DD'' , potremo indicare con

$$\lambda D, \frac{D''}{\lambda}$$

i nuovi valori di D, D'' , che dovranno nuovamente soddisfare le (8). Tenendo presenti le (8) stesse, troviamo così per la funzione incognita λ le due equazioni

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{\lambda} \right)}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{D}{D''} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{D''}{D} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right).$$

« Osservando le (A) e cambiando la funzione incognita λ col porre

$$\lambda^2 = 1 + \frac{1}{r},$$

queste si trasformano nelle altre

$$(9) \quad \frac{\partial r}{\partial u} = 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' (r+1), \quad \frac{\partial r}{\partial v} = 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' r.$$

« Ogni soluzione r delle (9) dà una soluzione del nostro problema ed inversamente; ma, perchè esse sono lineari in r , non possono ammettere più di una soluzione, senza essere illimitatamente integrabili ed ammetterne quindi infinite. In quest'ultimo caso si avrà

$$\frac{\partial \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'}{\partial u} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'}{\partial v} = 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'$$

e conseguentemente ⁽¹⁾ le linee sferiche (u, v) sono le immagini delle assin-

⁽¹⁾ Veggasi la mia Memoria nel tomo VIII, 1890, degli Annali di Matematica p. 320.

totiche di una superficie la cui curvatura, espressa pei parametri u, v delle linee assintotiche, ha la forma

$$(a) \quad K = - \frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}.$$

• Per le superficie della classe (a) ho dato nella Memoria ora citata dei metodi generali di trasformazione, che permettono di trovare con quadrature un numero illimitato di superficie di questa classe. Nello stesso tempo, se si parte dalle superficie conoidali rette, si conosceranno *tutte* le deformazioni infinitesime della superficie derivate, dalle quali avremo dunque senz'altro infinite superficie suscettibili delle speciali deformazioni considerate da Cosserat.

• Notevole è il caso speciale delle superficie di Voss. Allora si ha $\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}' = 0$, $\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}' = 0$, quindi $\lambda = \text{cost}^{\text{te}}$, e in ciascuna deformazione della classe considerata la prima e seconda curvatura delle geodetiche u, v vengono rispettivamente moltiplicate e divise per la medesima costante. Per le superficie pseudosferiche associate questa deformazione equivale, come facilmente si dimostra, alla *trasformazione di Lie*.

Fisica. — *Metodo per la misura della costante dielettrica dello zolfo* (1). Nota del prof. P. CARDANI, presentata dal Socio BLASERNA.

1. Scopo del lavoro.

• Colle ricerche, di cui ora renderò conto, mi sono prefisso lo scopo di determinare la costante dielettrica dello zolfo in campi elettrici abbastanza intensi.

• Le numerose ricerche sperimentali sulle costanti dielettriche dei corpi furono fatte, (tranne quelle antiche di Cavendish e di Faraday), collo scopo di verificare la notissima relazione del Maxwell che rilega tale costante dielettrica all'indice di refrazione: ma sia perchè quasi tutti gli sperimentatori hanno adoperato elettrometri del tipo di quello a quadranti del Thomson, sia per evitare ogni possibile penetrazione delle cariche elettriche nei dielettrici sottoposti all'esperienza, si adoperarono dei campi elettrici molto deboli, caricando le armature dei condensatori, dove i dielettrici erano interposti, coi poli di batterie costituite da un numero più o meno notevole di pile.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

« Nessun lavoro, che io mi sappia, è stato fatto nell'intendimento di conoscere come si comportino i dielettrici in campi di intensità variabile dentro limiti abbastanza estesi: mentre la stretta analogia esistente tra il potere induttore specifico dei corpi ed il coefficiente di induzione magnetica, o, come lo chiama il Thomson, di permeabilità magnetica, darebbe diritto a credere che l'influenza dell'intensità del campo debba farsi sentire sul valore della costante dielettrica.

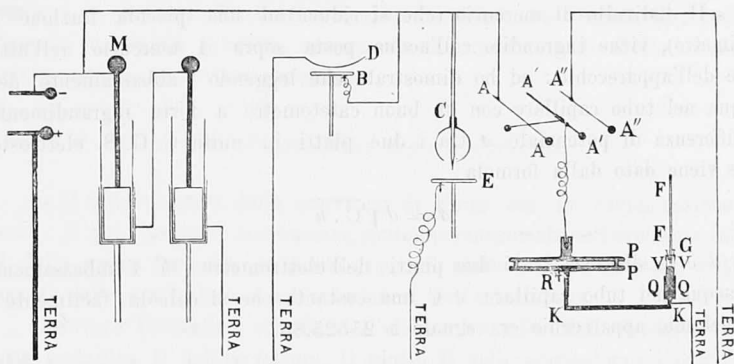
« Ho creduto quindi che non sarebbe priva di interesse una determinazione del valore di questa costante, fatta con questo indirizzo.

2. Descrizione degli apparecchi.

L'elettrometro.

« L'elettrometro, che ho adoperato in queste ricerche, è quello a tubi comunicanti che ho descritto in una Nota pubblicata nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (1).

« Consiste in due piatti circolari di ghisa PP (vedi la figura annessa), del diametro di circa 30 cm. tenuti paralleli da tre cilindretti di sostanze



isolanti, dei quali si conosce con precisione l'altezza. Nelle facce prospicienti, i piatti sono ben piani e levigati. Questi piatti sono disposti orizzontali e l'inferiore è sostenuto da un robusto treppiede a viti calanti.

« Nella parte centrale del piatto inferiore e per circa metà del suo spessore è stato scavato un pozzetto di circa 9 cm. di diametro, e nel centro il piatto è stato forato da parte a parte: in questo foro si trova innestato a vite un tubo di ferro KK doppiamente ricurvo, che fa comunicare il pozzetto del piatto con un cilindro cavo di ghisa QQ del diametro di circa 2 cm.

(1) Vol. VII, 2° semestre, pag 8, 1891.

Un tubo di vetro VV di diametro esterno eguale al diametro interno di questo cilindro cavo, vi aderisce con mastice e sporge per parecchi centimetri dal cilindro medesimo.

• Si versa mercurio nel pozzetto del piatto, e quando il mercurio arriva all'orlo del pozzetto, nell'altro tubo comunicante arriva nella parte formata dal vetro. Sopra il mercurio che si trova da questa parte si pone acqua distillata in modo da riempire tutto il tubo di vetro; indi si chiude l'estremità libera di questo tubo con un tappo di gomma G attraversato da un tubo capillare FF di vetro. Con questa chiusura si obbliga l'acqua a salire di un certo tratto nel tubo capillare: un rubinetto di vetro R posto sotto il pozzetto del piatto dell'elettrometro permette di fare uscire del mercurio in modo da ridurre poi la sua superficie a coincidere colla superficie piana della faccia superiore del piatto.

• Non ritorno ad esporre la teoria dell'apparecchio, del resto molto facile, e che ho esposto nella Nota più sopra citata: solo dirò che la superficie del mercurio agisce come il disco mobile dell'elettrometro assoluto del Thomson e che il piatto di ghisa funziona da anello di guardia. L'attrazione del disco superiore, che si mette in comunicazione colla sorgente di elettricità di cui si vuol misurare il potenziale, fa sollevare il mercurio sottostante.

• Il dislivello di mercurio (che si riduce ad una piccola frazione di millimetro), viene ingrandito coll'acqua posta sopra il mercurio nell'altra parte dell'apparecchio: ed ho dimostrato che leggendo l'abbassamento dell'acqua nel tubo capillare con un buon catetometro a forte ingrandimento, la differenza di potenziale \mathcal{A} tra i due piatti in unità C. G. S. elettrostatiche viene dato dalla formola

$$\mathcal{A} = d \sqrt{C \cdot h}$$

dove d è la distanza tra i due piatti dell'elettrometro, h l'abbassamento dell'acqua nel tubo capillare, e C una costante che si calcola facilmente e che nel mio apparecchio era eguale a 25525.85.

Lo scaricatore.

• Lo scaricatore era formato da una asticina di rame C terminata da un ago finissimo da cucire, e sostenuta lateralmente da un bastoncino di ebanite. Una sfera cava di 10 cm. di diametro poteva scorrere sopra questa asticina di modo che la punta dell'ago poteva o esser posta nella cavità interna della sfera, o sporgere più o meno al di fuori di essa. Un disco di metallo E comunicante col suolo e che si poteva a mano sollevare od abbassare, si trovava collocato sotto la punta dell'ago. Modificando la distanza tra la punta ed il disco e modificando la posizione della punta rispetto alla sfera, si poteva regolare la dispersione dell'elettricità che aveva luogo dalla punta dell'ago.

L'eccitatore.

« L'eccitatore, nel quale avveniva la scarica, era formato da una calotta sferica di raggio molto grande D, portata da tre bastoncini di vetro: questa calotta appoggiava sui sostegni dalla parte convessa.

« Al di sotto di questa calotta, un piano metallico B sopportato da un bastone di vetro si poteva sollevare od abbassare per mezzo di una eccellente vite micrometrica del passo di 1 mm. e colla testa divisa in 100 parti.

L'interruttore.

« L'interruttore era costituito da tre asticine metalliche A. A'. A'' terminate da sferette e disposte orizzontalmente e parallele. Una asticina metallica, terminata pure da una sferetta, poteva girare in un piano verticale attorno alla asticina di mezzo, in modo da stabilire la comunicazione o con l'una o con l'altra delle asticine laterali. Le tre asticine erano poi sostenute da manici isolanti.

La batteria.

« La batteria adoperata M era una di quelle che accompagnano generalmente i rocchetti di Rumkoff di grande modello: era formata di 4 bottiglie disposte in cascata e veniva caricata da una macchina di Holtz messa in movimento da un motore elettrico.

3. *Disposizione degli apparecchi.*

« Il polo positivo della macchina di Holtz era in comunicazione col suolo: il polo negativo comunicava contemporaneamente coll'armatura interna M della prima bottiglia della batteria, col piatto B dell'eccitatore, coll'asticina C dello scaricatore e coll'asticina A dell'interruttore.

« Invece l'armatura esterna dell'ultima bottiglia della batteria, la calotta metallica D dell'eccitatore, il piatto E dello scaricatore e l'asticina A'' dell'interruttore erano in comunicazione col suolo.

« Il piatto superiore dell'elettrometro comunicava coll'asticina di mezzo A' dell'interruttore, il piatto inferiore col suolo.

« Per mezzo dell'asticina girevole dell'interruttore si poteva far comunicare il piatto isolato dell'elettrometro o coll'armatura interna della batteria o col suolo.

4. *Metodo di misura della costante dielettrica.*

« La misura della costante dielettrica con l'elettrometro superiormente descritto non presenta alcuna difficoltà.

« Supponiamo di avere determinata la differenza di potenziale costante A

necessaria perchè avvenga la scarica nell'eccitatore con una determinata distanza esplosiva: la relazione

$$A = d \sqrt{C \cdot h}$$

ci permetterà di dedurre la distanza d alla quale si trovano i piatti dell'elettrometro, misurando l'abbassamento h del livello nel tubo capillare: in tal caso l'elettrometro funziona infatti come un condensatore a lamina d'aria.

• Interponiamo tra i piatti dell'elettrometro una lastra di zolfo, per esempio, a facce piane e parallele di spessore s e sia D lo spessore dei due strati d'aria che rimangono ancora tra le facce della lastra di zolfo e i piatti dell'elettrometro. È noto che alla lastra di zolfo si potrebbe sostituire una lamina d'aria di spessore $\frac{s}{K}$, essendo K la costante dielettrica dello zolfo, senza che venga alterata la capacità del condensatore costituito dai due piatti dell'elettrometro.

• La relazione precedente darebbe in tal caso

$$A = \left(D + \frac{s}{K} \right) \sqrt{C \cdot h'}$$

essendo h' il nuovo abbassamento di livello dell'acqua, da cui si ricaverebbe

$$K = \frac{s}{\frac{A}{\sqrt{C \cdot h'}} - D}$$

La misura della costante dielettrica si ridurrebbe così a misurare lo spessore della lastra di zolfo, la distanza dei piatti dell'elettrometro alle facce della lastra di zolfo, e l'abbassamento dell'acqua nel tubo capillare, supponendosi noto il valore A .

5. Determinazione di A .

• Nella Nota precedente citata, ho esposto come controllo della bontà dell'elettrometro i valori che aveva ottenuti come misura delle differenze di potenziale, in unità elettrostatiche assolute C. G. S., necessarie perchè avvenisse la scarica tra un piano ed una calotta sferica di raggio molto grande per diverse distanze esplosive; ed ho notato la grande concordanza tra i valori ottenuti col mio elettrometro e quelli ottenuti per esempio dal Baille e dal Thomson.

• Ma in quella Nota ho esposto i risultati relativi a distanze esplosive piuttosto piccole, che non superavano i 4 mm.: ho quindi intrapreso anzitutto uno studio accurato per determinare i valori di A anche per distanze esplo-

sive più grandi, e corrispondenti all'eccitatore che doveva servirmi in tutte le esperienze della costante dielettrica.

« In tale studio preliminare ho potuto osservare una perfetta concordanza nei valori ottenuti in giorni molto diversi: ma per avere questa concordanza bisognava prendere alcune precauzioni di cui non ho fatto cenno nella Nota pubblicata precedentemente.

« La prima precauzione consiste nell'avere le superfici dei piatti e quella del mercurio perfettamente pulite. Per ciò ogni giorno, ed occorrendo anche diverse volte in un giorno, rinnovava la superficie del mercurio: la qual cosa otteneva facilmente versando nel pozzetto molto mercurio in modo che esso uscendo da pozzetto si stendesse anche sul piatto. Indi con una lastra di vetro da specchio che appoggiava distesa quasi orizzontalmente sul piatto dell'elettrometro e che faceva scorrere sul piatto medesimo, levava la parte eccedente del mercurio e con essa le impurezze che si trovavano sulla superficie. Così rimaneva nel pozzetto del mercurio con una superficie rinnovata e perfettamente pulita.

« I piatti metallici poi erano sempre ripuliti con pelle di guanto.

« Tutte queste operazioni servono per impedire che si trovi sui piatti o sulla superficie di mercurio qualche corpuscolo estraneo che possa servire da punta: nelle misure si può accorgersi facilmente dell'esistenza di uno di questi corpuscoli estranei, perchè le indicazioni dell'elettrometro risultano notevolmente più piccole di quando l'elettrometro funziona nelle condizioni normali.

« La seconda precauzione da prendere è che la superficie del mercurio si confonda sempre colla superficie orizzontale del piatto che la contiene: non bisogna nè che la superficie del mercurio sporga sul piano del piatto, nè che sia più bassa: i valori dell'abbassamento dell'acqua nel tubo capillare evidentemente nel primo caso, per una data differenza di potenziale, sarebbero maggiori, e nel secondo caso minori del vero: ma essendo la superficie del mercurio abbastanza grande questa condizione è facilissima ad ottenersi, specialmente col rubinetto che ho collocato al disotto del pozzetto del mercurio.

« Finalmente bisogna che il menisco dell'acqua nel tubo capillare arrivi al punto nel quale si fa la misura sempre dalla medesima parte: e siccome quando l'elettrometro si carica, il menisco dell'acqua discende, bisogna che il menisco raggiunga la posizione di riposo anche discendendo: è questa del resto una precauzione che si prende sempre nelle misure di capillarità. Per ciò ha aggiunto un tubo di gomma al tubo capillare col quale, dopo scaricato l'elettrometro, aspirava l'acqua ad una posizione alquanto superiore a quella di riposo, in modo che, cessando di aspirare, il menisco ritornasse alla posizione di riposo discendendo.

« Con queste precauzioni ha avuto dei valori di una concordanza veramente notevole.

• Nel seguente specchio sono riassunti i valori ottenuti:

| Distanze esplosive | Differenza di potenziale |
|--------------------|--------------------------|
| cm. 0,1 | 13,6 |
| 0,2 | 24,3 |
| 0,3 | 35,1 |
| 0,4 | 45,0 |
| 0,5 | 54,7 |
| 0,6 | 63,5 |
| 0,7 | 72,0 |
| 0,8 | 79,5 |

• In una prossima Nota darò i risultati delle esperienze fatte con lastre di zolfo •.

Chimica. — Sul comportamento dell'indolo e di alcuni suoi derivati rispetto alla legge di Raoult ⁽¹⁾. Nota di ADOLFO FERRATINI e FELICE GARELLI presentata dal Corrispondente CIAMICIAN.

• È noto che nel determinare il peso molecolare di alcune sostanze organiche col metodo crioscopico, si osservarono, in special modo quando si impiegò come solvente il benzolo, alcune notevoli anomalie. Molte sostanze sciolte in questo idrocarburo diedero un coefficiente d'abbassamento troppo piccolo, dal quale risulterebbe un peso molecolare troppo elevato. Ricorderemo a questo riguardo le eccezioni riscontrate per le soluzioni benzoliche del tiofene, del fenolo, dell'alcool, degli acidi, delle ossime e del pirrolo osservate da Beckmann ⁽²⁾, Paternò ⁽³⁾ e Magnanini ⁽⁴⁾.

• Queste anomalie vennero in ogni caso attribuite alle attrazioni, che intervengono tra le molecole delle sostanze disciolte e tra queste e quelle del solvente; si ricorse quindi per spiegarle alla ipotesi molto probabile della formazione di aggregati molecolari, che il solvente non riesce a scindere in modo completo. La parte importante che spetta al solvente rispetto al limite di dissociazione, che può essere raggiunto da questi aggregati molecolari, è molto evidente, quando si consideri, che nella maggior parte dei casi i valori dei pesi molecolari vanno avvicinandosi tanto più ai valori normali, quanto più diminuisce la concentrazione della soluzione.

• In questi ultimi anni però l'esame accurato di alcune di queste ano-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

⁽²⁾ Zeitschrift für physikalische Chemie, II, 715.

⁽³⁾ Gazz. chim. XIX, 640.

⁽⁴⁾ Gazz. chim. XIX, 141, 251.