ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

dizione e per l'uso. Questo si può dire essere il primo passo per utilizzare nell'uomo il siero di sangue di animali vaccinati contro la rabbia, rispettivamente quella sostanza a cui esso deve le sue proprietà immunizzanti e curative.

« Riguardo poi alla dose minima di precipitato alcoolico necessaria per curare un coniglio rabbioso, noi non possiamo pronunciarci in modo assoluto. Non possiamo escludere infatti che noi, pel desiderio di ottenere costantemente risultati positivi, non abbiamo adoperato dosi superiori a quelle necessarie, e che con quantità molto minori di precipitato, non potesse egualmente ottenersi l'effetto desiderato.

« Nè abbiamo creduto doverci ulteriormente fermare su questo punto, poichè anche stabilita pel coniglio la dose minima di precipitato alcoolico sufficiente per guarirlo dalla rabbia sviluppata, noi non avremmo potuto applicare questi dati direttamente all'uomo, facendo cioè una semplice proporzione, senza tener conto della recettività diversa dell'uomo per quella malattia, della forza diversa del virus e di molte altre circostanze.

« A quest'ultima cognizione non sarà possibile arrivare altro che facendo le prove direttamente sull'uomo ».

Matematica. — *Su due congruenze di rette di 2° ordine e di 6ª classe.* Nota di D. Montesano, presentata dal Corrispondente Pincherle.

« Le congruenze di rette esaminate nella presente Nota sono entrambe costituite dalle generatrici di ∞^1 coni di 2° grado aventi i vertici su una linea razionale di 3° ordine che è gobba per la prima di esse e piana per la seconda. La prima delle congruenze studiate forma con un'altra di egual tipo la congruenza delle generatrici dei coni di una rete di quadriche i cui punti base si distribuiscono in quattro coppie costituite ciascuna da punti infinitamente vicini, mentre la seconda è costituita dalle generatrici dei coni di una rete di quadriche aventi in comune cinque punti e il piano tangente in uno di essi.

« La prima congruenza appartiene ad un complesso tetraedrale, la seconda ad un complesso di 3° grado dotato di una stella di raggi doppî; entrambe sono rappresentabili su di un piano; nè oltre di esse ed oltre la congruenza esaminata nell'altra mia Nota *Su una congruenza di rette di 2° ordine e di 4ª classe* (1), vi è alcun'altra congruenza non degenere di 2° ordine costituita da le generatrici di ∞^1 coni quadrici aventi i vertici su di un'unica linea d'ordine superiore al primo (2).

(1) Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XXVII.

(2) Di tutte e tre queste congruenze fa cenno lo Sturm nella sua Nota sulle congruenze di rette di 2° ordine (Math. Annalen, Bd. XXXVI).

« 1. Nella Nota *Su una congruenza di rette di 2º ordine e di 4ª classe* sono stati esaminati varî spezzamenti della curva nodale K_6 di una rete R di quadriche, nell'ipotesi che le superficie della rete non avessero in comune alcuna linea, e che le polarità dovute ad esse non ammettessero alcuna coppia di elementi corrispondenti in comune.

« Oltre gli spezamenti esaminati ve ne è un altro solo possibile nelle ipotesi anzidette, ed è quello in cui la curva nodale della rete R si scinde in due cubiche gobbe K_3, K'_3 aventi quattro punti in comune.

« Se tale spezzamento si verifica, nell'involuzione di 3º grado I dello spazio costituita dalle coppie di punti reciproci rispetto alle superficie della rete, non potranno essere a due a due coniugate fra loro le corde di ciascuna di queste due linee che risultano fondamentali per la I; ma alle corde dell'una linea dovranno essere coniugate le corde dell'altra, perchè se si corrispondessero nella I due corde della K_3, uno qualunque dei quattro punti di appoggio delle due corde con la curva avrebbe per corrispondente nella I una retta trisecante della K'_3 situata nel piano degli altri tre punti (Nota cit. § 1) il che è assurdo. Ne segue che alle tangenti t_n, t'_n delle K_3, K'_3 in uno qualunque A_n dei quattro punti $A_1, \ldots A_4$ comuni alle due linee, corrisponderanno nella I due corde c'_n, c_n delle K'_3, K_3 e i due tetraedri che hanno per vertici l'uno i punti comuni alle K_3, t_n ed alle K'_3, c'_n, l'altro i punti comuni alle K_3, c_n ed alle K'_3, t'_n saranno autoreciproci il primo rispetto alle quadriche di un fascio φ della R, l'altro rispetto alle quadriche di un secondo fascio φ' della stessa R. E siccome in ciascuno dei tetraedri accennati due vertici coincidono in A_n, perciò i due fasci saranno costituiti rispettivamente l'uno da quadriche tangenti in A_n al piano $A_n c'_n$, l'altro da quadriche tangenti nello stesso punto al piano $A_n c_n$, sicchè le quadriche della rete R saranno tangenti in A_n alla retta a_n comune ai piani accennati.

« Resta con ciò dimostrato che per lo spezzamento della curva nodale K_6 di una rete R di quadriche in due cubiche gobbe, è necessario che gli otto punti base della rete R si distribuiscano in quattro coppie ciascuna costituita da due punti infinitamente vicini.

« Inversamente è agevole riconoscere che questa condizione è anche sufficiente per lo spezzamento in questione.

« Si noti infatti da prima che presi ad arbitrio sei punti $P_1, \ldots P_6$ nello spazio, le coppie di punti che con i precedenti formano gruppi base di reti di quadriche, costituiscono un'involuzione di 7º grado I_7 (¹), nella quale corrisponde per intero ad ogni suo punto la $C_3 \equiv P_1 .. P_6$ ed una qualunque delle rette $r_1, \ldots r_{15}$ che uniscono a due a due i punti $P_1, \ldots P_6$. Nella I_7 risultano unite le corde della C_3 anzidetta e la superficie punteggiata unita

(¹) Vegg. Geiser, *Ueber zwei geometrische Probleme*. Giornale di Crelle, vol. LXVII; e Reye, *Geometria di posizione*. Parte 2ª, lezione 30ª.

è una $U_4 \equiv (P_1 \dots P_6)^2\, C_3\, r_1 \dots r_{15}\, s_1 \dots s_{10}$, avendo indicato con s_i la retta comune ad un piano che passi per tre dei punti $P_1, \dots P_6$ ed al piano che contiene gli altri tre. Ogni punto P di tale superficie U_4 è vertice di un cono quadrico che passa per $P_1, \dots P_6$ (1); ed il secondo punto base della rete delle quadriche passanti per $P, P_1, \dots P_6$ è il punto infinitamente vicino a P su la corda c della C_3 uscente da P, la quale corda sega ulteriormente la U_4 nel punto P′ coniugato armonico a P rispetto ai due punti di appoggio della c con la C_3. Da quest'ultimo fatto deriva che la U_4 è coniugata a se stessa nell'involuzione T_3 dello spazio costituita dalle coppie di punti reciproci rispetto alle quadriche passanti per C_3 (2).

« Ora se i punti $P_1, P_2; P_3, P_4; P_5, P_6$ coincidono rispettivamente in A_1, A_2, A_3 su le rette a_1, a_2, a_3, dalla superficie U_4 del caso precedente si stacca il piano $\alpha \equiv A_1 A_2 A_3$ (perchè questo contato due volte forma un cono che contiene i sei punti dati) e la restante parte della U_4 risulta la superficie U_3 coniugata al precedente piano nell'involuzione T_3 determinata dalla cubica gobba $\gamma^{(4)}$, che passa per i punti A_1, A_2, A_3 e tocca in essi rispettivamente le rette a_1, a_2, a_3; sicchè la U_3 ha per punti doppî i punti A_1, A_2, A_3, e contiene le a_1, a_2, a_3 e la $\gamma^{(4)}$ ora indicata. E se A_4 è un punto arbitrario della superficie che si trovi su la corda a_4 della $\gamma^{(4)}$, e che perciò risulta il coniugato armonico del punto di sezione della a_4 col piano $A_1 A_2 A_3$ rispetto ai punti di appoggio della stessa retta con la $\gamma^{(4)}$, vi è una rete R costituita da quadriche che passano per i punti $A_1, \dots A_4$ e toccano in essi rispettivamente le rette $a_1, \dots a_4$. La curva nodale di tale rete R dovendo trovarsi oltre che sulla superficie $U_3 \equiv (A_1 A_2 A_3)^2\, a_1 a_2 a_3\, A_4$ adesso indicata, su le superficie analoghe $U'_3 \equiv (A_1 A_2 A_4)^2\, a_1 a_2 a_4\, A_3$, $U''_3 \equiv (A_1 A_3 A_4)^2\, a_1 a_3 a_4\, A_2$, $U'''_3 \equiv (A_2 A_3 A_4)\, a_2 a_3 a_4\, A_1$, ammette per elementi doppî i punti $A_1, \dots A_4$, e quindi si spezza in due cubiche gobbe K_3, K'_3 aventi in comune i punti $A_1, \dots A_4$.

« E siccome in generale ogni retta che unisce due punti base di una rete di quadriche, si appoggia alla curva nodale delle rete in due punti che trovansi anche sulla cubica gobba che passa per gli altri sei punti base della rete, perciò le rette $a_1, \dots a_4$ sono corde comuni alle due cubiche K_3, K'_3 e i punti in cui una qualunque a_i di esse incontra oltre che in A_i le K_3, K'_3, sono i punti B_i, B'_i in cui essa sega la cubica gobba γ_i che è tangente alle

(1) Cfr. Battaglini, *Sui complessi di 2° grado*, § 1. Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 3ª, vol. III.

(2) Per tale corrispondenza studiata da prima dal Geiser, *Zur Theorie der Flächen zweiten und dritten Grades*, § XII. Giornale di Crelle t. LXIX e posteriormente da Sturm, *Ueber das Flachennetz zweiter Ordnung*. Giornale di Crelle, t. LXX, § 49 veg. anche Reye, *Geometria di posizione* (Parte 2ª, lez. 14ª); e Cantone, *Teoremi sulla cubica gobba*. Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, agosto 1886.

a_l, a_m, a_n nei punti A_l, A_m, A_n rispettivamente (per i, l, m, $n = 1, 2, 3, 4$ in qualunque ordine).

Di più per la proprietà già dimostrata che il coniugato armonico del punto A_i rispetto ai punti B_i, B'_i trovasi sul piano $\alpha_i \equiv A_l\, A_m\, A_n$, si ha che in una qualunque trasformazione birazionale (3, 3) fra due sistemi dello spazio che ai piani dell'un sistema faccia corrispondere nell'altro sistema delle $\Phi_3 \equiv (A_1 \dots A_4)^2$ [o delle $\Psi'_3 \equiv (A' \dots A'_4)^2$] alle cubiche K_3, K'_3 linee nodali della rete R corrispondono due rette k, k' si fatte che sulla retta a'_i della stella (A'_i) appoggiata alle k, k' i due punti di sezione con tali rette sono separati armonicamente dal punto A'_i e dal punto di sezione della a'_i col piano $\alpha'_i \equiv A'_l\, A'_m\, A'_n$, sicchè le k, k' appartengono ad una quadrica S'_2, rispetto alla quale il tetraedro $A'_1\, A'_2\, A'_3\, A'_4$ è autoreciproco, e corrispondentemente le K_3, K'_3 appartengono ad una $S_6 \equiv (A_1 \dots A_4)^4$ che passa due volte per gli spigoli del tetraedro $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ ed è coniugata a se stessa nelle quattro omologie armoniche che hanno per centri i vertici di tale tetraedro e per piani assiali le faccie rispettivamente opposte di esso.

E dalla proprietà già dimostrata che ogni tetraedro autoreciproco rispetto alle quadriche di un fascio della rete R, la cui curva nodale si scinda in due cubiche K_3, K'_3, ha due vertici su ciascuna di tali linee, si deduce che la congruenza costituita dalle generatrici dei coni della rete si spezza nel caso in quistione in due congruenze $Q_{2,6}$, $Q'_{2,6}$ entrambe di egual tipo, di 2° ordine cioè e di 6ª classe, costituite ciascuna da le generatrici di ∞^1 coni quadrici aventi i vertici su una (K_3 o K'_3) delle curve nodali e passanti per i punti $A_1, \dots A_4$ nei quali toccano le rette $a_1, \dots a_4$ rispettivamente.

Uno qualunque dei punti $A_1, \dots A_4$ è vertice di due coni di ciascuna delle Q, Q'; l'uno è il cono della rete R, l'altro è quello che proietta la linea singolare della congruenza.

2. *Le congruenze $Q_{2,6}$, $Q'_{2,6}$ ora ottenute appartengono ciascuna ad un complesso tetraedrale i cui punti singolari sono $A_1, \dots A_4$.*

Si consideri infatti il complesso tetraedrale Γ che contiene le stelle di rette $(A_1), \dots (A_4)$ e la congruenza $Q_{1,2}$ che ha per direttrici la retta a_1 e la conica $\chi_2 \equiv A_2\, A_3\, A_4$ sezione del piano $\alpha_1 \equiv A_2\, A_3\, A_4$ col cono χ_2 che proietta da A_1 la linea singolare K_3 della $Q_{2,6}$.

Il cono del complesso che ha per vertice un qualunque punto P dello spazio, sega la retta a_1, oltre che in A_1, nel punto di sezione con il raggio r della $Q_{1,2}$ anzidetta uscente da P, sicchè se questo punto si trova sul cono χ_2 ora indicato, il raggio r appartiene al cono χ_2 e i due punti di sezione del cono del complesso di vertice P con la a_1 coincidono in A_1. Ne segue che i coni del complesso Γ che hanno i vertici sulla K_3, passano per i punti $A_1, \dots A_4$ e nel primo di questi punti toccano la retta a_1, sicchè coincidono con i coni della $Q_{2,6}$, e ne segue il teorema.

E pel fatto che i coni indicati sono del pari tangenti alle a_2, a_3, a_4

ne segue che queste rette sono prime direttrici di congruenze del complesso Γ le cui seconde direttrici sono le proiezioni della curva K_3 fatte rispettivamente dai punti A_2, A_3, A_4 sui piani

$$\alpha_2 \equiv A_3 A_4 A_1 , \ \alpha_3 \equiv A_4 A_1 A_2 , \ \alpha_4 \equiv A_1 A_2 A_3 ;$$

ed il ragionamento fatto permette di affermare inversamente che:

« *I coni di un complesso tetraedrale* Γ *che hanno i vertici su di una cubica gobba* K_3 *passante per i punti singolari* $A_1, \ldots A_4$ *di* Γ, *formano una congruenza* $Q_{2,6}$ *del tipo in esame, se le corde della* K_3 *non appartengono al complesso.*

« *Le rette* $a_1, \ldots a_4$ *a cui risultano tangenti i coni della* $Q_{2,6}$ *sono le seconde direttrici di quelle congruenze del complesso che ammettono per prime direttrici le coniche proiezioni della* K_3 *da i singoli vertici del tetraedro* $A_1 \ldots A_4$ *sulle faccie opposte.*

« I sei raggi doppi $A_1 A_2, \ldots A_3 A_4$ del complesso Γ sono anche doppi per la $Q_{2,6}$, nè questa ammette piani singolari.

« I coni di Γ che hanno i vertici su una retta arbitraria r dello spazio segano la K_3, oltre che in $A_1, \ldots A_4$, in coppie di punti coniugati in una corrispondenza involutoria (2, 2), i cui punti uniti sono dovuti ai punti della retta r situati sulla superficie focale Φ della congruenza $Q_{2,6}$.

« Questa superficie è perciò una $\Phi_4 \equiv K_3^2\, a_1 \ldots a_4\, \gamma^{(1)} \ldots \gamma^{(4)}$, continuando a designare con $\gamma^{(i)}$ la cubica gobba che ha per corda la a_i ed è tangente alle altre tre delle rette $a_1, \ldots a_4$ nei punti A situati su di esse.

« Inversamente i coni di 2° grado circoscritti ad una superficie $\Phi_4 \equiv K_3^2$ che hanno i vertici su tale linea doppia K_3, sono costituiti da rette che appartengono ad una congruenza $Q_{2,6}$ del tipo in esame, perchè essi contengono tutti i quattro punti $A_1, \ldots A_4$ della K_3 per i quali passano coppie di generatrici della superficie costituite ciascuna da rette infinitamente vicine, e toccano rispettivamente queste generatrici $a_1, \ldots a_4$ nei punti $A_1, \ldots A_4$ da cui escono (1).

« Due generatrici g, g' infinitamente vicine della Φ_4 determinano con la K_3 una quadrica su la quale la schiera delle secanti semplici della K_3 essendo costituita da rette tangenti alla Φ_4 appoggiate alla K_3, fa parte della congruenza $Q_{2,6}$.

« Questa perciò ammette oltre il sistema Σ dei coni che la formano, anche un sistema $\infty^1\, \Sigma'$ di schiere rigate di cui fanno parte i quattro coni che da $A_1, \ldots A_4$ proiettano la K_3, i quali sono dovuti alle generatrici $a_1, \ldots a_4$ della superficie Φ.

(1) L'esistenza di questi punti può dedursi con la maggiore semplicità sia dalla considerazione diretta dei punti di sezione della K_3 doppia con un qualunque cono della congruenza, sia dalla rappresentazione della superficie Φ_4 su di un piano, in riguardo alla quale veggasi: Armenante, *Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere* $p = 0$ *sopra un piano*. Annali di Matematica, serie 2ª, tom. IV, § 8 e 9.

« E siccome un raggio arbitrario della congruenza appartiene ad un solo cono di Σ e ad un'unica schiera di Σ', e viceversa un cono di Σ ed una schiera rigata di Σ' hanno un unico raggio in comune, perciò riferiti proiettivamente i sistemi Σ e Σ' a due fasci di raggi distinti (S), (S') di un medesimo piano π (ciò che è possibile perchè i sistemi Σ, Σ' sono riferiti con corrispondenza univoca al sistema dei punti della K_3 ed a quello delle generatrici della $\Phi_4 \equiv K_3^2$) si viene a rappresentare la congruenza $Q_{2,6}$ sul piano π, riguardando come corrispondente ad ogni raggio della $Q_{2,6}$ il punto comune alle rette dei fasci (S), (S') che corrispondono al cono di Σ ed alla schiera di Σ' che contengono il raggio considerato.

« In tale rappresentazione i punti S, S' sono rispettivamente l'immagine di una schiera rigata di Σ e di un cono di Σ', le rette del piano π sono le immagini di superficie gobbe di 4° grado della $Q_{2,6}$ aventi per linea semplice la K_3, e la $S_8 \equiv K_3^2 (A_1, \dots A_4)^4$ costituita dai raggi comuni alla $Q_{2,6}$ ed a un complesso lineare, ha per immagine su π una $C_4 \equiv (SS')^2$, sicchè il ràngo della $Q_{2,6}$ (numero delle coppie di rette della congruenza situate in un medesimo fascio di raggi con una retta assegnata ad arbitrio) è 5.

« Le quadriche sostegno delle schiere rigate del sistema Σ', formano una varietà quadratica appartenente alla rete di superficie di 2° ordine che ha per base la K_3. Ora si ha inversamente che:

« *Essendo* V_2 *una varietà* ∞^1 *e quadratica di superficie di 2° ordine appartenente ad una rete* R_0 *che abbia per linea base una cubica gobba* K_3, *le generatrici delle superficie della* V_2 *che sono secanti semplici della* K_3 *formano una congruenza* $Q_{2,6}$ *del tipo che studiasi, i cui punti singolari sono i vertici* $A_1, \dots A_4$ *dei quattro coni* $H_1, \dots H_4$ *della* R_0 *appartenenti alla* V_2.

« E notando che se φ_i è il fascio della R_0 che ha in comune con la V_2 due superficie coincidenti in H_i, (per $i = 1, \dots 4$) la retta a_i che con la K_3 forma la base del fascio φ_i, è la tangente nel punto A_i a tutti i coni della $Q_{2,6}$ aventi i vertici sulla K_3, si deduce che la $Q_{2,6}$ è del tutto individuata quando se ne dia la linea singolare K_3, i quattro punti singolari $A_1, \dots A_4$ ed una qualunque delle rette $a_1, \dots a_4$, o quando si diano tre dei punti $A_1, \dots A_4$ e le rette a_i uscenti da due di essi.

« Si hanno invece ∞^1 congruenze $Q_{2,6}$ che ammettono per linea singolare una cubica assegnata K_3 e per punti singolari quattro punti $A_1, \dots A_4$ dati su tale linea.

« Esse formano un fascio nel complesso delle seganti della K_3; e le ∞^1 cubiche K'_3 che con la K_2 formano la linea nodale delle corrispondenti reti R costituiscono la $S_6 \equiv (A_1 \dots A_4)^4 K_3$ che passa con due falde per i sei spigoli del tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$ ed è coniugata a se stessa nelle quattro omologie armoniche che hanno per centri e per piani assiali i vertici e le faccie rispettivamente opposte di tale tetraedro.

« 3. Volendo ora esaminare il caso di una rete R di quadriche le cui polarità ammettano una coppia di elementi corrispondenti in comune, supporremo da prima che tale coppia sia costituita da un punto O e da un piano ω che non si appartengano. In tale caso gli otto punti base della R risultano a due a due coniugati nell'omologia armonica di centro O e di piano assiale ω, sicchè si trovano su quattro rette della stella (O) formanti un angolo quadrispigolo completo di cui due faccie opposte formano una quadrica degenere della R, e quindi la curva nodale della rete si spezza nei tre raggi diagonali del quadrispigolo indicato e nella curva di 3° ordine del piano ω che è la jacobiana della rete di coniche sezioni di ω con la rete R.

« Questa ultima linea γ_3 contiene i tre vertici diversi da O del tetraedro autoreciproco rispetto alla quadriche di un qualsiasi fascio della R, sicchè la congruenza costituita dalle generatrici dei coni non degeneri della rete risulta una $Q_{3,6}$ che ha per linea singolare la γ_3.

« Ma se il punto O ed il piano ω si appartengono, se cioè le quadriche della rete R hanno in comune i punti O, $P_1, \dots P_4$ ed il piano tangente ω nel primo di essi, allora in ogni fascio della R due coni coincidono ed hanno il vertice in O, mentre gli altri due hanno i vertici sulla jacobiana della rete di sezione del piano ω con la R, la quale curva è una $C_3 \equiv O^2 T_1 \dots T_6$, avendo indicato con T_i la traccia su ω di una congiungente due dei punti $P_1, \dots P_4$; sicchè la congruenza dei coni non degeneri della rete si spezza nella stella di raggi (O) ed in una congruenza $Q_{2,6}$ avente per linea singolare la C_3 ora indicata, e per punti singolari i punti $P_1, \dots P_4$ da ognuno dei quali la C_3 viene proiettata secondo un cono appartenente alla congruenza, la quale perciò contiene i sei spigoli del tetraedro $P_1 \dots P_4$. Di più la $Q_{2,6}$ contiene anche il fascio di raggi ($O - \omega$).

« E può affermarsi che:

« *I coni che passano per cinque punti arbitrari* O, $P_1, \dots P_4$ *dello spazio e toccano nel primo di essi un piano dato* ω, *costituiscono una congruenza* Q *di 2° ordine e di 6ª classe avente per linea singolare la cubica* C_3 *del piano* ω *che ha in* O *un punto doppio e si appoggia alle congiungenti a due a due i punti* $P_1, \dots P_4$.

« Per queste congiungenti e per la C_3 passa una superficie di 3° ordine Φ_3 che ha in $P_1, \dots P_4$ dei punti doppî e che è tangente in O al piano ω. Essendo tale superficie correlativa nello spazio alla superficie di Steiner, il cono circoscritto ad essa avente per vertice un qualunque suo punto P, si spezza in due coni quadrici aventi in comune le rette $PP_1, \dots PP_4$, sicchè se il punto P è sulla C_3 ora indicata, essendovi fra le tangenti alla Φ_3 che passano per P, la retta PO, uno dei coni accennati è il cono della congruenza $Q_{2,6}$ di vertice P, e quindi la superficie focale della congruenza si spezza nel piano ω e nella $\Phi_3 \equiv (P_1 \dots P_4)^2 C_3$ ora ottenuta.

« Inversamente si ha che le tangenti ad una superficie di 3° ordine, dotata di quattro punti doppî, che si appoggiano alla curva sezione della superficie con un suo piano tangente senza toccare la superficie su tale curva, formano due congruenze $Q_{4,6}$, $Q_{2,6}$, la seconda delle quali è del tipo in esame.

« Nella rete R che contiene i coni della $Q_{2,6}$ esistono ∞^1 fasci le cui linee basi si spezzano. Una qualunque di queste C_4 degeneri è costituita da un raggio c del fascio $(O - \omega)$ e dalla cubica gobba C_3 che passa per i punti O, O', $P_1, \ldots P_4$ ed è tangente nel primo di tali punti al piano ω, avendo indicato con O' il secondo punto di sezione del raggio c con la curva $C_3 \equiv O^2\, T_1 \ldots T_6$.

« Ora la cubica gobba secondo cui il cono della congruenza di vertice O' tocca la superficie focale Φ_3, passa per i punti O', O, $P_1, \ldots P_4$ e quindi coincide con la ϱ_3, perciò la superficie Φ_3 risulta il luogo delle cubiche gobbe ϱ_3 che con i raggi del fascio $(O - \omega)$ formano le curve basi degeneri di fasci della rete R.

« Le ϱ_3 costituiscono sulla Φ_3 un fascio avente per base i punti $O, P_1, \ldots P_4$, e si ha che la ϱ_3 che passa per un punto arbitrario A della Φ_3 sega il piano ω (a cui è tangente in O) nel punto A' che è la traccia su ω dell'unico raggio a della congruenza $Q_{2,6}$ uscente da A. Sicchè fra i punti della Φ_3 ed i raggi della $Q_{2,6}$ vi è una corrispondenza univoca, mediante la quale può assai agevolmente ottenersi la rappresentazione più semplice della $Q_{2,6}$ su di un piano.

« Basta rappresentare la Φ_3 su di un piano σ in modo che le $\omega_3 \equiv OP_1 \ldots P_4$ della superficie abbiano per immagini le rette di un fascio (S), e riguardare come corrispondente di un raggio r della $Q_{2,6}$ il punto R di σ che nella rappresentazione data della Φ_3 corrisponde al punto di contatto di questa superficie con la r. Con ciò i coni quadrici della $Q_{2,6}$ hanno per immagini le rette del fascio (S); i coni dovuti ai punti singolari $P_1, \ldots P_4$ hanno per immagini i lati del quadrilatero completo che ha per vertici i punti fondamentali $A_1, \ldots A_6$ della rappresentazione della Φ_3; i raggi del fascio $(O - \omega)$ hanno per immagini i punti infinitamente vicini ad S ed i raggi $P_1 P_2, \ldots P_3 P_4$ della $Q_{2,6}$ hanno per immagini quegli stessi punti $A_1, \ldots A_6$ che ne sono le immagini nella rappresentazione della Φ_3 sul piano σ.

« Ne segue che la superficie $S_8 \equiv C_3^2 (P_1 \ldots P_4)^3$ costituita dai raggi comuni alla $Q_{2,6}$ e ad un complesso lineare, ha per immagine su σ una $C_3 \equiv O$, sicchè il rango della $Q_{2,6}$ è 5.

« Dalla rappresentazione data segue ancora che le superficie rigate di grado minimo contenute nella $Q_{2,6}$ sono delle S_3 formanti sistema lineare ∞^2 le quali toccano la Φ_3 lungo le cubiche della rete di cui fa parte il fascio delle $\varrho_3 \equiv OP_1 \ldots P_4$.

« Il complesso di grado minimo non dotato di linea direttrice a cui appartiene la $Q_{2,6}$, è il complesso di 3° grado Γ costituito dalle generatrici delle quadriche della rete R che contiene i coni della congruenza. Tale complesso Γ ha per raggi doppî i raggi della stella (O) e per raggi semplici quelli delle stelle

$(P_1), \ldots (P_4)$ ed ammette per superficie singolare la superficie focale Φ_3 della $Q_{2,6}$, per ogni punto della quale il cono del complesso Γ si scinde in un cono di secondo grado passante per $O, P_1, \ldots P_4$ ed in un fascio di raggi il cui piano passa per O; come in ogni piano τ tangente alla Φ_3 l'inviluppo dei raggi del complesso Γ ammette per raggio doppio il raggio della congruenza $Q_{2,6}$ che giace in τ.

« 4. Restano ora ad esaminarsi semplicemente il caso di una rete R di quadriche le cui polarità abbiano una coppia di rette coniugate in comune ed il caso in cui le quadriche della R abbiano una retta, o una conica, o una cubica gobba in comune.

« In tutti questi casi è agevole riconoscere che le generatrici dei coni non degeneri della rete costituiscono congruenze di tipi già noti, fra le quali non ve ne è alcuna non degenere e di 2° ordine che abbia un'unica linea singolare di ordine superiore al primo.

« Perciò può affermarsi che:

« *Esistono semplicemente tre tipi di congruenze non degeneri di 2° ordine costituite dalle generatrici di ∞^1 coni di 2° grado, i cui vertici appartengano ad un'unica linea di ordine superiore al primo* ».

Matematica. — *A complemento di alcuni teoremi del sig. Tchebicheff*. Nota di Giovanni Frattini, presentata dal Socio Beltrami.

« In una Memoria del sig. Tchebicheff (¹) si dimostra che, se l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = -N$$

nella quale, come in quel che seguita, le lettere significano numeri interi e positivi, è risolubile in numeri interi e positivi, essa ammette qualche soluzione non maggiore di

$$\sqrt{\frac{N(p_1+1)}{2D}},$$

compresa cioè fra 0 e la limitazione qui scritta (²). (Con p_1 si è indicato il valore di x nella soluzione minima dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1).$$

« Nella mia Nota, *Due proposizioni della teoria dei numeri e loro interpretazione geometrica* (³), dimostrai il seguente teorema, del quale è im-

(¹) *Sur les formes quadratiques*, v. il « Journal de mathématiques pures et appliquées » 1851.

(²) Dicendo che una soluzione di un'equazione è compresa fra certe limitazioni, si alluderà sempre al valore di y, relativo a quella soluzione. Di più si riguarderanno le due limitazioni quali possibili valori della y.

(³) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1892, vol. I, 1° sem.