ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

(P_1), ... (P_4) ed ammette per superficie singolare la superficie focale Φ_3 della $Q_{2,6}$, per ogni punto della quale il cono del complesso Γ si scinde in un cono di secondo grado passante per $O, P_1, \ldots P_4$ ed in un fascio di raggi il cui piano passa per O; come in ogni piano τ tangente alla Φ_3 l'inviluppo dei raggi del complesso Γ ammette per raggio doppio il raggio della congruenza $Q_{2,6}$ che giace in τ.

« 4. Restano ora ad esaminarsi semplicemente il caso di una rete R di quadriche le cui polarità abbiano una coppia di rette coniugate in comune ed il caso in cui le quadriche della R abbiano una retta, o una conica, o una cubica gobba in comune.

« In tutti questi casi è agevole riconoscere che le generatrici dei coni non degeneri della rete costituiscono congruenze di tipi già noti, fra le quali non ve ne è alcuna non degenere e di 2° ordine che abbia un'unica linea singolare di ordine superiore al primo.

« Perciò può affermarsi che:

« *Esistono semplicemente tre tipi di congruenze non degeneri di 2° ordine costituite dalle generatrici di ∞^1 coni di 2° grado, i cui vertici appartengano ad un'unica linea di ordine superiore al primo* ».

Matematica. — *A complemento di alcuni teoremi del sig. Tchebicheff.* Nota di GIOVANNI FRATTINI, presentata dal Socio BELTRAMI.

« In una Memoria del sig. Tchebicheff (1) si dimostra che, se l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = -N$$

nella quale, come in quel che seguita, le lettere significano numeri interi e positivi, è risolubile in numeri interi e positivi, essa ammette qualche soluzione non maggiore di

$$\sqrt{\frac{N(p_1+1)}{2D}},$$

compresa cioè fra 0 e la limitazione qui scritta (2). (Con p_1 si è indicato il valore di x nella soluzione minima dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1).$$

« Nella mia Nota, *Due proposizioni della teoria dei numeri e loro interpretazione geometrica* (3), dimostrai il seguente teorema, del quale è im-

(1) *Sur les formes quadratiques*, v. il « Journal de mathématiques pures et appliquées » 1851.

(2) Dicendo che una soluzione di un'equazione è compresa fra certe limitazioni, si alluderà sempre al valore di y, relativo a quella soluzione. Di più si riguarderanno le due limitazioni quali possibili valori della y.

(3) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1892, vol. I, 1° sem.

mediata conseguenza quello del sig. Tchebicheff: se 1, p_1, p_2, ecc., sono i valori di x nelle successive soluzioni intere e positive dell'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$, la serie dei numeri

$$0,\ \sqrt{\frac{N(p_1+1)}{2D}},\ \sqrt{\frac{N(p_2+1)}{2D}},\ \sqrt{\frac{N(p_3+1)}{2D}},\ldots \qquad (a)$$

separa le soluzioni intere e positive dell' equazione

$$x^2 - Dy^2 = -N$$

per modo, che il numero delle soluzioni comprese fra due termini consecutivi della serie è costante.

Ora, avendo il sig. Tchebicheff altresì dimostrato (1) che l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N,$$

se risolubile, ammette qualche soluzione fra 0 e

$$\sqrt{\frac{N(p_1-1)}{2D}},$$

e non risultando dal contenuto del citato mio lavoro un teorema più generale anche su questo proposito, mi propongo di trovarlo con questa Nota, dimostrando che: la serie dei numeri

$$0,\ \sqrt{\frac{N(p_1-1)}{2D}},\ \sqrt{\frac{N(p_2-1)}{2D}},\ \sqrt{\frac{N(p_3-1)}{2D}},\ldots$$

separa le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

per modo, che il numero delle soluzioni comprese fra due termini consecutivi della serie è costante (2).

(1) L. c.

(2) La seguente interpretazione geometrica, che per brevità è solo accennata, pone in nuova ed ottima luce i due teoremi così generalizzati, mostrandone vie' meglio l'indole e l'importanza. S'immagini un sistema di coordinate Cartesiane rettangolari x ed y, e, mediante parallele agli assi delle coordinate, diviso il piano in quadrati di lato eguale all'unità. Si riguardi inoltre ogni nodo della rete dei quadrati come affetto da un indice intero, eguale al valore che le coordinate del nodo medesimo conferiscono alla forma $x^2 - Dy^2$. Dei quattro angoli formati dalle rette $x^2 - Dy^2 = 0$, i due acuti saranno il campo dei nodi positivi, affetti cioè da indice positivo, e i due ottusi saranno il campo dei nodi negativi. — Ciò premesso, si considerino le sostituzioni lineari *improprie* che trasformano in sè medesima la forma $x^2 - Dy^2$. Ognuna di tali sostituzioni determinerà una trasformazione lineare involutoria del piano, per la quale ad un punto (x, y) corrisponderà un punto (x', y') e a questo il primo, mediante le formole

$$x = \alpha x' - D\beta y'$$
$$y = \beta x' - \alpha y';$$

significando α e β due interi, positivi o negativi, che soddisfanno la condizione $\alpha^2 - D\beta^2 = 1$. Se nelle precedenti formole si pone $x = x'$ ed $y = y'$, si trova che delle due equazioni risultanti l'una è conseguenza dell'altra; e che perciò ciascuna delle considerate trasfor-

« 1. Risulta dalla ricordata mia Nota che il numero delle soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ comprese fra due termini consecutivi della serie

$$0\,,\quad q_1\sqrt{N}\,,\quad q_2\sqrt{N}\,,\quad q_3\sqrt{N},\cdots \tag{1}$$

è costante [1].

« Confrontando la precedente serie con l'altra

$$0,\ \sqrt{\frac{N(p_1-1)}{2D}},\ \sqrt{\frac{N(p_2-1)}{2D}},\ \sqrt{\frac{N(p_3-1)}{2D}},\cdots \tag{b}$$

è facile verificare che i termini della prima sono ordinatamente eguali ai successivi termini di posto dispari della seconda: che cioè

$$q_s\sqrt{N} = \sqrt{\frac{N(p_{2s}-1)}{2D}}\,.$$

Infatti, per un teorema noto,

$$p_{2s} + q_{2s}\sqrt{D} = (p_1 + q_1\sqrt{D})^{2s} = (p_s + q_s\sqrt{D})^2 = 2Dq_s^2 + 1 + 2p_s q_s\sqrt{D}$$

e conseguentemente

$$p_{2s} = 2Dq_s^2 + 1\,;$$

$$q_s\sqrt{N} = \sqrt{\frac{N(p_{2s}-1)}{2D}}\,.$$

« Considerando ora un numero dispari di termini della (*b*) incominciando da 0, si supponga dimostrato che tante soluzioni sono comprese fra il primo termine e il medio, quante fra questo e l'ultimo. Potrà inferirsene senz'altro il teorema che è l'oggetto di questa Nota: che cioè il numero delle solu-

---

mazioni lineari ammette una retta, luogo dei punti che si trasformano in sè medesimi. Tale retta, che può chiamarsi *asse della trasformazione o della sostituzione*, passa per l'origine delle coordinate ed ha per equazione

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha+1}\,.$$

Ecco pertanto come possono enunciarsi i due teoremi di Tchebicheff generalizzati: Gli assi delle sostituzioni lineari improprie per le quali $x^2 - Dy^2$ torna in sè medesima, dividono il campo dei nodi positivi di questa forma in settori angolari, col centro nel centro del campo: e in modo, che dentro ciascun settore, l'indice di qualsivoglia nodo positivo è contenuto lo stesso numero (finito) di volte. — Nella stessa maniera si diportano gli assi delle sopraddette sostituzioni, per rispetto al campo dei nodi negativi della forma $x^2 - Dy^2$.

[1] Veramente, secondo la mia Nota, si dovrebbe escludere la limitazione superiore dai possibili valori di y, anche quando N fosse quadrato perfetto. Ma è evidente che il teorema sussiste, anche comprendendo tale limitazione: e che il numero costante relativo a questo caso si ottiene aggiungendo una unità a quello che è relativo al primo caso.

zioni comprese fra due termini consecutivi della (b) è costante. Infatti, nell'ammessa ipotesi, tante soluzioni saranno comprese fra 0 e

$$\sqrt{\frac{N(p_{2m-1}-1)}{2D}}$$

quante fra questa limitazione e

$$\sqrt{\frac{N(p_{4m-2}-1)}{2D}};$$

tante cioè fra il primo e il terzo termine della serie di cinque termini

$$0,\ \sqrt{\frac{N(p_{2m-2}-1)}{2D}},\ \sqrt{\frac{N(p_{2m-1}-1)}{2D}},\ \sqrt{\frac{N(p_{2m}-1)}{2D}},\ \sqrt{\frac{N(p_{4m-2}-1)}{2D}},$$

quante fra il terzo e il quinto. D'altra parte la serie di cinque termini scritta qui sopra è uguale a quest'altra:

$$0,\ q_{m-1}\sqrt{N},\ \sqrt{\frac{N(p_{2m-1}-1)}{2D}},\ q_m\sqrt{N},\ q_{2m-1}\sqrt{N};$$

e di più tante soluzioni sono fra 0 e $q_{m-1}\sqrt{N}$ quante fra $q_m\sqrt{N}$ e $q_{2m-1}\sqrt{N}$ (come facilmente si vede, ricordando che è costante il numero delle soluzioni comprese fra due termini consecutivi della (1)). Perciò è chiaro che il numero delle soluzioni comprese fra il secondo e il terzo termine dell'una o dell'altra delle precedenti due serie di cinque termini, dovrà essere uguale a quello delle soluzioni fra il terzo e il quarto. — Ponendo consecutivamente $m = 1, 2, \ldots$ e per ciascun valore dato ad m applicando quest'ultima conclusione, si ottiene il teorema che si deve dimostrare.

« 2. Rimane a dimostrarsi l'ipotesi ammessa finora, che cioè, considerando un numero dispari di termini della (b) incominciando da 0, il numero delle soluzioni comprese fra il primo termine e il medio è uguale a quello delle soluzioni fra il medio e l'ultimo.

« Sia

$$\sqrt{\frac{N(p_n-1)}{2D}}$$

il termine della (b) che si considera come medio fra 0 e un altro termine. Quest' altro termine sarà

$$\sqrt{\frac{N(p_{2n}-1)}{2D}} = q_n\sqrt{N}.$$

« Usando le formole di Eulero

$$y'_0 = q_n x_0 - p_n y_0$$
$$x'_0 = p_n x_0 - Dq_n y_0$$

da una soluzione (x_0, y_0) dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ se ne deriva un'altra (x'_0, y'_0). Da esse si ricava

$$y_0 = q_n x'_0 - p_n y'_0$$
$$x_0 = p_n x'_0 - Dq_n y'_0 ;$$

il che mostra che le dette formole sono inverse di sè stesse, epperò stabiliscono fra le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ una corrispondenza involutoria. Tale corrispondenza sussiste altresì fra le soluzioni intere e positive, entro i limiti 0 e $q_n \sqrt{N}$ della y: ossia è tale che, se (x_0, y_0) è soluzione dell'equazione in numeri interi e positivi, dei quali $y_0 \leq q_n \sqrt{N}$, (x'_0, y'_0) è una soluzione altrettale dell'equazione medesima, e reciprocamente. — Supponendo infatti che x_0 ed y_0 sieno positive ed $y_0 \leq q_n \sqrt{N}$, si verifica facilmente che $x_0 \leq p_n \sqrt{N}$: e poi, che

$$q_n x_0 \geq p_n y_0 ; \quad p_n x_0 \geq Dq_n y_0 ;$$

ossia $y'_0 \geq 0$; $x'_0 \geq 0$. — Che poi y'_0 non superi $q_n \sqrt{N}$, che cioè

$$q_n x_0 - p_n y_0 \leq q_n \sqrt{N},$$

risulta dal seguente calcolo:

$$(x_0 - \sqrt{N})(x_0 + \sqrt{N}) = Dy_0^2$$

e conseguentemente, riguardando anche il caso $y_0 = 0$ ed $x_0 = \sqrt{N}$,

$$x_0 - \sqrt{N} \leq y_0 \sqrt{D}.$$

« Ora

$$p_n^2 - Dq_n^2 = 1$$

epperò

$$q_n \sqrt{D} < p_n .$$

« Moltiplicando fra loro le due ultime disuguaglianze e semplificando, viene

$$q_n (x_0 - \sqrt{N}) \leq p_n y_0$$

ossia

$$q_n x_0 - p_n y_0 \leq q_n \sqrt{N}.$$

« 3. Accade poi che, se una delle due soluzioni coniugate (x_0, y_0), (x'_0, y'_0) è compresa fra le limitazioni

$$0, \sqrt{\frac{N(p_n - 1)}{2D}},$$

l'altra è compresa fra le limitazioni

$$\sqrt{\frac{N(p_n - 1)}{2D}}, q_n \sqrt{N},$$

e reciprocamente. Per dimostrarlo, basterà provare che due soluzioni coniugate disuguali non possono essere tutte e due comprese fra le prime li-

mitazioni o fra le seconde; che cioè (facendo uso nel medesimo tempo dei segni $>$ o dei segni $<$) non può essere

$$y_0 \gtrless \sqrt{\frac{N(p_n - 1)}{2D}}; \quad y'_0 \gtrless \sqrt{\frac{N(p_n - 1)}{2D}}.$$

- Infatti dalla prima di queste disuguaglianze e dalla $x_0^2 - Dy_0^2 = N$ seguirebbe:

$$x_0 \gtrless \sqrt{\frac{N(p_n - 1)}{2}}.$$

- Perciò

$$x_0 + y_0\sqrt{D} \gtrless \sqrt{N(p_n + q_n\sqrt{D})}.$$

- Ed elevando al quadrato, sostituendo $x_0^2 - Dy_0^2$ invece di N e semplificando,

$$x_0 + y_0\sqrt{D} \gtrless (x_0 - y_0\sqrt{D})(p_n + q_n\sqrt{D}).$$

- Dalla quale

$$\frac{y_0}{x_0} \gtrless \frac{q_n}{1 + p_n}$$

ovvero

$$y_0 \gtrless q_n x_0 - p_n y_0$$

od anche

$$y_0 \gtrless y'_0.$$

- Ma, per la seconda delle due diseguaglianze ipotetiche, si dimostrerebbe similmente che

$$y'_0 \gtrless y_0;$$

conclusione che contradice la precedente.

- Essendo possibile trasformare involutoriamente le soluzioni intere e positive comprese fra 0 e $\sqrt{\frac{N(p_n - 1)}{2D}}$ in quelle comprese fra questa seconda limitazione e $q_n\sqrt{N}$, le prime e le seconde debbono essere in egual numero. — C. B. D.

- 4. Corollario. — Se N è primo, fra 0 e $\sqrt{\frac{N(p_n \pm 1)}{2D}}$ non può essere compresa che una sola soluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \mp N$ [1]. In tal caso le serie (*a*) e (*b*) separeranno le soluzioni intere e positive dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$ o dell'altra $x^2 - Dy^2 = N$

[1] Tchebicheff, Mem. cit.

(supposte possibili) per modo, che fra due numeri consecutivi dell'una o dell'altra serie sarà compresa una soluzione della relativa equazione, ed una sola » [1].

Fisica. — *Misura della costante dielettrica dello zolfo* [2]. Nota del prof. P. Cardani, presentata dal Socio Blaserna.

1. *Preparazione delle lastre di zolfo.*

« Per avere delle lastre di zolfo a facce ben piane e sufficientemente parallele, ho fatto costruire due lastre di marmo quadrate di 35 cm. di lato e ben levigate. Dopo aver passata sopra le lastre della tela leggermente oleata, interposi fra di esse tre piccoli frammenti di vetro tolti da una lastra da specchio e quindi di spessore perfettamente eguale.

(1) Nel « Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario » anni VI e VII, ho dimostrato che la formola generale per la risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$ in numeri interi e positivi è la seguente:

$$x + y\sqrt{D} = (\pm k + h\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^m,$$

qualora α e β indichino due interi positivi che soddisfanno la condizione $\alpha^2 - D\beta^2 = 1$, e k, h i valori della x e della y relativi al sistema di quelle soluzioni che non sono maggiori di $\sqrt{\frac{N(\alpha+1)}{2D}}$. Inoltre, che la formola generale per la risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ in numeri interi e positivi è

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^m,$$

indicando con k ed h i valori della x e della y relativi a quelle soluzioni per le quali $h < \beta\sqrt{N}$. Se non che, come ho dimostrato nel Periodico medesimo, limitando i valori di h alle sole soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ che non sono maggiori di $\sqrt{\frac{N(\alpha-1)}{2D}}$, l'ultima formola di risoluzione può essere surrogata dalla equivalente

$$x + y\sqrt{D} = (k \pm h\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^m.$$

Questo ulteriore risultato, mentre dimostra l'importanza che le limitazioni dello Tchebicheff hanno per rispetto alla risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \mp N$ (importanza non avvertita dall'esimio Autore nella sua Memoria *Sur les formes quadratiques*, ma che apparisce chiara da quanto pubblicai in proposito nel « Periodico di Matematica ») mi obbliga a rettificare un'affermazione contenuta nel mio lavoro *Due proposizioni della teoria dei numeri e loro interpretazione geometrica*, ove, in nota, ebbi a dire la limitazione $\sqrt{\frac{N(\alpha-1)}{2D}}$ della y *insufficiente* per la risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, e *necessaria* invece la considerazione della limitazione $\beta\sqrt{N}$. La congettura non è giusta, per ciò che ho detto qui sopra: ma non infirma in nulla il ricordato mio lavoro.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma. Vedi pag. 48.