ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Meccanica. — *Determinazione dell'equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili.* Nota di PIETRO BURGATTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Liouville fu il primo (nel 1846) a cercare l'equazioni di Hamilton-Jacobi, corrispondenti ai problemi della meccanica con due gradi di libertà, integrabili mediante semplici quadrature. Egli ne trovò una di una forma molto importante, che si trova ora studiata nei migliori trattati di meccanica e di geometria differenziale.

Quarantacinque anni dopo il prof. Stäckel [1] pose il problema nei termini precisi e generali scritti nel titolo di questa Nota, e trovò, per le n variabili, un caso d'integrabilità, che è l'immediata generalizzazione di quello del Liouville. Qualche hanno prima, studiando l'equazioni con due sole variabili indipendenti, egli aveva risoluto interamente il problema, determinando due nuovi casi d'integrabilità, oltre a quello del Liouville, e mostrando che non ne esistono altri.

Più tardi, nel 1904, il prof. Levi-Civita [2] determinò tutte le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè un'equazione di Hamilton-Jacobi sia integrabile per separazione delle variabili; lo studio delle quali condurrebbe senza dubbio alla soluzione completa del problema, vinta che fosse la ripugnanza alla fatica di calcoli assai lunghi e laboriosi.

Applicando il metodo in certe ipotesi restrittive, egli pervenne con una elegante analisi a un nuovo caso d'integrabilità, che è la generalizzazione alle n variabili di uno dei casi trovati dallo Stäckel per due variabili.

Poco dopo, nel 1906, il prof. Dall'Acqua [3] riuscì con opportuni artifizî a fare uno studio esauriente dell'equazioni del Levi-Civita, ora ricordate, per il caso delle tre variabili, e trovò quattro espressioni per l'energia cinetica; le sole che dian luogo a equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili.

In questo scritto io ho ripreso il problema in tutta la sua generalità; e, abbandonati i metodi finora usati, guidato più dall'intuizione che da una logica rigorosa, son pervenuto alla determinazione di $n+1$ equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili.

Resterebbe da dimostrare che quell'equazioni sono le sole rispondenti al problema: sulla qual cosa io non ho dubbio alcuno; ma non ne ho trovato finora una dimostrazione soddisfacente.

(1) *Habilitationsschrift*, Halle 1891. Math. Ann., Bd. XLII, pag. 537.
(2) *Sulla integrazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi* ecc. Math. Ann., Bd. 59.
(3) *Sulla integrazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi* ecc. Math. Ann., Bd. 66.

2. Sia

$$\sum_{r,s=1}^{n} A_{rs} \frac{\partial V}{\partial q_r} \frac{\partial V}{\partial q_s} = 2 \{ V(q_1 \, q_2 \ldots q_n) + h \} \tag{1}$$

un'equazione di Hamilton-Jacobi, ove il primo membro rappresenta una forma quadratica omogenea nelle $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ con coefficienti dipendenti dalla q, e h una costante. Ammettiamo che abbia un integrale completo della forma

$$V = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q_i \,, \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \, h) ; \tag{2}$$

il che si esprime dicendo che è integrabile mediante la separazione delle variabili.

In tale ipotesi è manifesto che la (1) deve essere il risultato dell'eliminazione delle α tra l'equazioni

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \varphi_i'(q_i \,, \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \, h) \qquad (i = 1 \,, 2 \,, \ldots n), \tag{3}$$

che si deducono dalla (2) mediante derivazioni. D'altra parte, scritto un sistema qualunque della forma (3), è chiaro che si dedurrà la V con quadrature; la quale sarà l'integrale completo di un'equazione del primo ordine, risultante dall'eliminazione delle α. Ma cotesta equazione non sarà in massima del tipo (1), quadritica omogenea nelle derivate di V. Bisognerà dunque cercare quei particolari sistemi (3), che, mediante l'eliminazione delle α, portano a un'equazione della forma (1).

La prima idea che viene in mente, per poco che si pensi alla questione posta in quei termini, è di prendere i secondi membri delle (3) uguali alla radice quadrata d'una espressione lineare rispetto alle costanti; ossia, di porre

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)^2 &= 2\psi_i(q_i) + \varphi_{i1}(q_i)\,\alpha_1 + \varphi_{i2}(q_i)\,\alpha_2 + \cdots + \\ &+ \varphi_{in-1}(q_i)\,\alpha_{n+1} + \varphi_{in}(q_i)\,.\,2h \qquad (i = 1 \,, 2 \,, \ldots n) . \end{aligned} \tag{3'}$$

L'eliminazione delle α porta subito all'equazione

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^3 - 2\psi_1(q_1) - 2\varphi_{1n}(q_1)\,h & \varphi_{11}(q_1) & \varphi_{12}(q_1) & \ldots & \varphi_{1n-1}(q_1) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 - 2\psi_2(q_2) - 2\psi_{2n}(q_2)\,h & \varphi_{21}(q_2) & \varphi_{22}(q_2) & \ldots & \varphi_{2n-1}(q_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial V}{\partial q_n}\right)^2 - 2\psi_n(q_n) - 2\varphi_{nn}(q_n)\,h & \varphi_{n1}(q_n) & \ldots & \ldots & \varphi_{nn-1}(q_n) \end{vmatrix} = 0 ;$$

che è del tipo (1). Infatti, indicando con Φ il determinante formato con le φ_{rs}, si ottiene con lo sviluppo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{in}} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)^2 = 2\left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{in}} \psi_i(q_i) + h \right\}.$$

È l'equazione trovata dallo Stäckel. Per $n=2$, essa si riduce alla forma di Liouville.

3. Un altro sistema (3), che si presenta alla mente come atto a fornire equazioni del tipo (1), è il seguente:

$$(2'') \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = \varphi_{i1}(q_i)\,\alpha_1 + \varphi_{i2}(q_i)\,\alpha_2 + \cdots + \varphi_{i\,n-1}(q_i)\,\alpha_{n-1} + \varphi_{in}(q_i)\sqrt{2h - \mathfrak{T}}$$
$$\text{per } i = 1, 2, \dots n;$$

ove $\mathfrak{T}$ è una forma quadratica omogenea nelle α a coefficienti costanti.

Per eliminare le α risolviamo il sistema rispetto a $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$ e $\sqrt{2h - \mathfrak{T}}$; avremo, usando le notazioni precedenti,

$$\Phi\alpha_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{si}} \cdot \frac{\partial V}{\partial q_s} \qquad (i = 1, 2, \dots n-1)$$

$$\Phi\sqrt{2h - \mathfrak{T}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{sn}} \frac{\partial V}{\partial q_s}.$$

Da quest' ultima si trae

$$\mathfrak{T} + \left[\frac{1}{\Phi} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_{sn}} \frac{\partial V}{\partial q_s}\right]^2 = 2h;$$

onde sostituendo in $\mathfrak{T}$ alle α le loro espressioni, si ottiene evidentemente una equazione del tipo (1).

Tale equazione, benchè abbia una forma più generale in apparenza, corrisponde in sostanza a quel caso di integrabilità trovato dal prof. Levi-Civita, del quale ho parlato in principio.

4. Il sistema (3'') del paragrafo precedente suggerisce tosto l'idea di prendere alcune equazioni lineari nella α e le rimanenti analoghe alla forma (3''), nel modo che segue:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \varphi_{11}(q_1)\,\alpha_1 + \cdots + \varphi_{1r}(q_1)\,\alpha_r$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = \varphi_{r2}(q_r)\,\alpha_1 + \cdots + \varphi_{rr}(q_r)\,\alpha_r$$

$$(3''') \quad \frac{\partial V}{\partial q_{r+1}} = \varphi_{r+1,1}(q_{r+1})\,\alpha_1 + \cdots + \varphi_{r+1,r}(q_{r+1})\,\alpha_r + \Psi_{r+1}(q_{r+1}) \times$$
$$\times\sqrt{2h - \mathfrak{T}_{r+1} + \varphi_{r+1,r+1}(q_{r+1})\,\alpha_{r+1} + \cdots + \varphi_{r+1,n-1}(q_{r+1})\,\alpha_{n-1} + 2\varphi_{r+1,n}(q_{r+1})}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_n} = \varphi_{n1}(q_n)\,\alpha_1 + \cdots + \varphi_{nr}(q_n)\,\alpha_r + \Psi_n(q_n) \times$$
$$\times\sqrt{2h - \mathfrak{T}_n + \varphi_{n,r+1}(q_n)\,\alpha_{r+1} + \cdots + \varphi_{n,n-1}(q_n)\,\alpha_{n-1} + 2\varphi_{nn}(q_n)};$$

dove $\mathfrak{S}_s$ è una forma quadratica omogenea nelle $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ con coefficienti dipendenti dalla sola q_s. Risolvendo le prime r equazioni rispetto alle α, e sostituendo le loro espressioni nelle rimanenti equazioni; poi elevando al quadrato, si trovano $n - r$ equazioni della forma

$$E_s + \mathfrak{S}_s = 2h + 2\varphi_{sn}(q_s) + \varphi_{s,r+1}(q_s)\,\alpha_{r+1} + \cdots + \varphi_{s,n-1}(q_s)\,\alpha_{n-1}$$
$$(s = r + 1, \dots o);$$

dove E_s, come del pari $\mathfrak{S}_s$, è una espressione quadratica omogenea nelle derivate della V. Da queste si possono eliminare le $n - r - 1$ costanti α; dopo di che si ottiene evidentemente una equazione del tipo (1) (per brevità, non la scrivo per disteso).

Attribuendo ad r successivamente i valori $1, 2, \dots n - 1$ (ritenendo $\alpha_n = 0$), si ottengono $n - 1$ equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili. Colle due trovate precedentemente, diventano in totale in numero di $n + 1$. Si noti che per $r = 0$, ritenendo per convenzione $\alpha_0 = 0$, il sistema (3‴) si riduce al (3′).

Le $n + 1$ equazioni ora trovate e i corrispondenti sistemi (3) potranno bensì ridursi sostanzialmente a un numero minore di tipi, specializzando le funzioni φ e ψ, o trasformando in modo opportuno le variabili (e anzi ciò avviene effettivamente); ma lasciando interamente arbitrarie le φ e ψ, e considerando le sole trasformazioni del tipo $Q_s = Q_s(q_s)$, quei sistemi (3) sono irreducibili l'uno all'altro; talchè, sotto questo punto di vista, si possono considerare distinti.

Ora è importante il fatto che, nel caso delle due e tre variabili ($n = 2, 3$) l'equazioni di Hamilton-Jacobi, che si deducono nel modo spiegato di sopra, coincidono con quelle determinate dagli autori citati [1]; i quali dimostrarono che sono le sole integrabili mediante la separazione delle variabili. Dunque il fatto, che non esistono altre equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili per separazione delle variabili, oltre le $n + 1$ determinate di sopra (n essendo il numero delle variabili), è vero per $n = 2$ e 3. Ciò lascia pensare che sia vero per n qualunque. Per dimostrare questo teorema, che esaurirebbe interamente la questione, ho tentato il metodo dell'induzione completa; ma si urta contro difficoltà, che non mi sembrano facili a superare. In attesa d'un momento di migliore ispirazione, ho creduto utile intanto di far conoscere i risultati raccolti in questa Nota.

[1] Coincidono anche rispetto alla U, come facilmente si deduce (per esempio) dalle equazioni di condizione del prof. Levi-Civita.