ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Contemporaneamente a questa caduta dei fiori si presentavano in altri rami di sviluppo più tardivo *nuove infiorescenze nascenti nelle guaine fogliari, cioè clandestine*, le quali *maturarono i semi* nel corso dell'estate fino a novembre, *conservando in modo assoluto il carattere clandestino.*

Si ebbe adunque:

nel 1905 una fioritura sola prettamente clandestina, estiva-autunnale;

nel 1906 una fioritura sola, prettamente clandestina, autunnale, fertile;

nel 1907 una fioritura precoce primaverile e perfettamente libera e aperta, ed una seconda fioritura estivo-autunnale, prettamente clandestina; la prima sterile, la seconda fertile.

Nei successivi anni 1908, 1909, 1910 la fioritura annuale di queste piante *è stata sempre aperta, libera, senza alcuna traccia di clandestinità.*

Dai semi della fruttificazione unica clandestina del 1906 si ottennero nuove piante che fiorirono per la prima volta nel 1908 *con fioritura estivo-autunnale perfettamente clandestina, fertile.*

Nell'anno successivo però, 1909, le infiorescenze di queste piante, a fioritura estivo-autunnale, *sono state completamente libere, aperte, ma furono fertili,* avendo prodotto frutti, *perchè non caddero i fiori.*

Matematica. — *Sull'operatore di Laplace per le omografie vettoriali.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Gli operatori assoluti $\varDelta$, $\varDelta'$ che compariscono nelle note [1] formule

$$(a) \qquad \varDelta m = \mathrm{I}_1 \frac{d \operatorname{grad} m}{d\mathrm{P}} = \operatorname{div} \operatorname{grad} m$$

$$(b) \qquad \varDelta' \mathbf{u} = \operatorname{grad} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}\,,$$

per m numero ed $\mathbf{u}$ vettore funzioni del punto P, corrispondono, una volta introdotte le coordinate cartesiane, all'operatore di Laplace

$$(c) \qquad \varDelta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Se nella (a) si pone una omografia generale α al posto dell'omografia speciale (numero) m, allora $\varDelta\alpha$ è numero ben determinato, ma l'operatore $\varDelta$ non ha più la forma (c).

L'operatore cartesiano $\varDelta_2$ è certo applicabile ad una omog. e produce una omog. Nelle applicazioni si presenta l'omog. che si ottiene applicando

[1] C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Omografie vettoriali*, pag. 61 (citeremo questo libro con *O. v.*).

(*c*) ad una omog. α qualunque [1]. Pare dunque importante introdurre una nuova omog., che è opportuno indicare con $\Delta\alpha$ (estendendo il significato di Δ nella (*a*)), che dia la (*a*) come caso particolare e per la quale l'operatore Δ corrisponda, introdotte le coordinate, al tachigrafo Δ_2.

In questa Nota espongo le proprietà fondamentali dell'omog. $\Delta\alpha$, e come applicazione, che pare importante, dò la soluzione generale della equazione

$$\operatorname{grad} \xi = \mathbf{f},$$

essendo ξ omog. (*incognita*) e $\mathbf{f}$ vettore (*dato*) funzioni del punto P [2].

1. Se essendo α una omog. funzione del punto P poniamo, per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario funzione di P,

$$[1] \qquad (\Delta\alpha)\,\mathbf{x} = \operatorname{grad}\left\{\frac{d(\alpha\mathbf{x})}{dP} - 2\alpha\frac{d\mathbf{x}}{dP}\right\} + \alpha\left(\operatorname{grad}\frac{d\mathbf{x}}{dP}\right),$$

è facile riconoscere, per mezzo delle formule (*O. v.*, n. 26) che collegano gli enti assoluti ai tachigrafi cartesiani, che $\Delta\alpha$ è appunto ciò che si ottiene applicando il Δ_2 ad α.

Risulta così in modo indiretto [3] che $\Delta\alpha$ è omog. funzione di α ed è numero solo quando α è numero. Segue ancora che Δ è *operatore tra omog. e omog.*, e quindi, come il Δ' (che *è operatore tra vettori e vettori* [4])

(1) Al prof. T. Boggio si è appunto presentato in alcune ricerche sulla elasticità, il simbolo $\Delta'(\alpha\mathbf{a})$, con $\mathbf{a}$ vettore costante, simbolo che gli era utile trasformare in $(\Delta\alpha)\mathbf{a}$, essendo $\Delta\alpha$ l'omog. che si ottiene applicando (*c*) ad α. È in seguito alla comunicazione fattami dal prof. Boggio che ho creduto utile studiare l'omog. $\Delta\alpha$.

(2) Maxwell, Scientific Papers, vol. II, pag. 102. — Morera, *Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo,* Rend. Acc. Lincei, serie V, vol. I, 1° sem. 1892.

(3) Cioè per mezzo delle coordinate. Per dimostrare direttamente, sotto forma assoluta, che $\Delta\alpha$ è omog. basta provare che

$$(\Delta\alpha)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\Delta\alpha)\,\mathbf{x} + (\Delta\alpha)\,\mathbf{y} \quad \text{e} \quad (\Delta\alpha)(m\mathbf{x}) = m\,\{(\Delta\alpha)\,\mathbf{x}\}.$$

La prima risulta subito dalla [1]. La seconda si deduce pure dalla [1] applicando note regole di calcolo omografico (*O. v.*, n. 23, [2], [11]) e tenendo presente che

$$\operatorname{grad} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\operatorname{div}\mathbf{u})\,\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dP}\,\mathbf{u}.$$

In modo analogo dalla [1] si deduce la (*a*).

(4) E quindi Δ e Δ' operatori *distinti*, come risulta anche dalle (*a*) (*b*), [1], per quanto ridotti alla forma di tachigrafi per le coordinate abbiano la *forma* (*c*) a comune.

ammette le potenze positive di qualsiasi ordine (non quelle negative non essendo Δ invertibile come risulta subito da [1]), potenze che però non sappiamo attualmente esprimere in modo semplice mediante l'operatore $\frac{d}{dP}$ o i suoi derivati grad, rot, div [1].

Nelle formule seguenti che esprimono importanti proprietà, non ancora note, degli operatori Δ, Δ', valgono le ipotesi; α è omog.; m è numero; $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}$ sono vettori (tutti funzioni del punto P); $\mathbf{a}$ è vettore indipendente da P (còstante).

$$[2] \qquad (\Delta\alpha)\,\mathbf{x} = \Delta'(\alpha\mathbf{x}) + \alpha(\Delta'\mathbf{x}) - 2\,\mathrm{grad}\left(\alpha\frac{d\mathbf{x}}{dP}\right),$$

ovvero sotto forma simbolica (e corretta perchè l'aggruppamento $(\mathrm{grad}\,\alpha)\frac{d\mathbf{x}}{dP}$ è privo di significato) indipendente da $\mathbf{x}$,

$$[2'] \qquad \Delta\alpha = \Delta'\alpha + \alpha\Delta' - 2\,\mathrm{grad}\,\alpha\frac{d}{dP}$$

$$[3] \qquad (\Delta\alpha)\,\mathbf{a} = \Delta'(\alpha\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\,\frac{d(\alpha\mathbf{a})}{dP}$$

$$[4] \qquad \mathrm{V}(\Delta\alpha) = \Delta'(\mathrm{V}\alpha)$$

$$[5] \qquad \mathrm{D}(\Delta\alpha) = \Delta(\mathrm{D}\alpha),\ \mathrm{K}(\Delta\alpha) = \Delta(\mathrm{K}\alpha),\ \mathrm{I}_1(\Delta\alpha) = \Delta(\mathrm{I}_1\alpha)$$

$$[6] \qquad \Delta(m\alpha) = m(\Delta\alpha) + (\Delta m)\,\alpha + 2\,\frac{d\alpha}{dP}\,\mathrm{grad}\,m$$

[*O. v.*, n. 25, [5] per α numero]

$$[7] \qquad \Delta'(\alpha\mathbf{u}) = (\Delta\alpha)\,\mathbf{u} - \alpha(\Delta'\mathbf{u}) + 2\,\mathrm{grad}\left(\alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)$$

[la [2] (*O. v.*, n. 25, [7] per α numero]

$$[8] \qquad \Delta(\mathbf{u}\wedge) = (\Delta'\mathbf{u})\wedge$$

$$[9] \qquad \Delta\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathrm{H}(\mathbf{u},\Delta'\mathbf{v}) + \mathrm{H}(\Delta'\mathbf{u},\mathbf{v}) + 2\left(\frac{d\mathbf{v}}{dP}\cdot\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)$$

$$[10] \qquad \mathrm{grad}\,(\Delta\alpha) = \Delta'(\mathrm{grad}\,\alpha)\ ^{(2)}$$

[*O. v.*, n. 25, [11] dim. solo per α numero].

2. *La soluzione generale della equazione*

$$[11] \qquad \mathrm{grad}\,\xi = 0,$$

(1) La prima delle [12] del n. 25 di *O. v.* vale soltanto per $\Delta\Delta$ applicato a numero.

(2) Le dimostrazioni non presentano difficoltà, sia che si facciano in modo assoluto, sia mediante il tachigrafo cartesiano Δ_2. Con questo bisogna notare che

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z} = \mathrm{grad}\left(\alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) - \alpha(\Delta'\mathbf{u}).$$

essendo ξ *omog. funzione del punto* P, *è*

[12] $$\xi = \Delta\alpha - \frac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{dP},$$

ove α *è una omog.* ARBITRARIA *funzione di* P [1].

La soluzione [12] soddisfa certo alla [11] perchè la [10], in virtù della (*b*), assume la forma

$$\mathrm{grad}\left\{\Delta\alpha - \frac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{dP}\right\} = 0\,;$$

resta quindi da provare che: *ogni soluzione della* [11] *ha la forma* [12].

Se **a** è vettore costante, arbitrario, si ha (*O. v.*, n. 24, [10])

$$\mathbf{a} \times \mathrm{grad}\,\xi = \mathrm{div}(K\xi\mathbf{a}) \quad [2],$$

e quindi la [11] equivale a

[11′] $$\mathrm{div}(K\xi\mathbf{a}) = 0\,,$$

per **a** vettore costante *arbitrario*.

La [11′] esprime anche che Kξ**a** *deve essere la rotazione di un vettore* [3]. Inoltre: affinchè la [11′] sia vera per **a** qualunque *basta* che sia verificata per i tre vettori **i**, **j**, **k** di una terna ortogonale unitaria costante. Dunque: *resterà dimostrato che la* [12] *è soluzione generale della* [11] *quando si potrà provare che: fissati ad arbitrio i vettori* **u**, **v**, **w**, *funzioni di* P, *e la terna unitaria ecc. costante* **i**, **j**, **k** *esiste almeno una*

(1) Ciò prova l'importanza del *gradiente di una omografia* e delle *derivate rispetto ad un punto,* elementi che non possono esser considerati con i sistemi di Hamilton, Gibbs e con i *tensori* dei tedeschi, mancando il concetto *assoluto* di omografia generale. Per α numero, ξ è una dilatazione, e dalla (12) si ottengono, in tale caso particolare, formule già note.

(2) È sotto questa forma che, recentemente, il prof. T. Boggio ha data la importante def. *assoluta* di grad α, def. che era stata data in *O. v.* mediante una terna ortogonale (*Sul gradiente di una omog. vettoriale,* Rend. Acc. Lincei, vol. XIX, ser. 5ª, 2° sem. 1910). In generale, per **u** vettore funzione di P si ha:

$$\mathbf{u} \times \mathrm{grad}\,\alpha = I_1\left\{\frac{d(K\alpha\mathbf{u})}{dP} - (K\alpha)\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right\}.$$

(3) Cfr. ad es. *Eléments de Calcul Vectoriel,* A. Hermann, Paris, 1910 (Chap. II) di C. Burali-Forti e R. Marcolongo.

omog. α *tale che*

$$[13] \qquad \begin{cases} \mathrm{K}(\varDelta\alpha)\,\mathbf{i} - \mathrm{K}\dfrac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{i} = \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \\ \mathrm{K}(\varDelta\alpha)\,\mathbf{j} - \mathrm{K}\dfrac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{j} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v} \\ \mathrm{K}(\varDelta\alpha)\,\mathbf{k} - \mathrm{K}\dfrac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{k} = \mathrm{rot}\,\mathbf{w}\ (^1). \end{cases}$$

Alla omog. generale α si può dare la forma

$$[14] \qquad \alpha = \mathrm{H}(\mathbf{x}\,,\mathbf{i}) + \mathrm{H}(\mathbf{y}\,,\mathbf{j}) + \mathrm{H}(\mathbf{z}\,,\mathbf{k})$$

con $\mathbf{x} = \mathrm{K}\alpha\mathbf{i}$, ecc. Allora dalle formule del n. 1 si ha subito (*O. v.*, n. 23, [11])

$$\mathrm{K}(\varDelta\alpha) = \mathrm{H}(\mathbf{i}\,,\varDelta'\mathbf{x}) + \cdots + \cdots$$

$$\mathrm{K}\frac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{d\mathrm{P}} = \mathrm{H}(\mathbf{i}\,,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{x}) + \cdots + \cdots,$$

dalle quali (*O. v.*, n. 24, ultima delle [17])

$$[15] \qquad \mathrm{K}(\varDelta\alpha) - \mathrm{K}\frac{d\,\mathrm{grad}\,\alpha}{d\mathrm{P}} = -\,\mathrm{H}(\mathbf{i}\,,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{x}) - \cdots - \cdots$$

In conseguenza la relazione tra i vettori $\mathbf{u}$, ... e i vettori $\mathbf{x}$, ... che, per la [14], *determinano* α, è espressa, in virtù delle [13], dalle formule

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{x} + \mathbf{u}) = 0\,, \quad \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{y} + \mathbf{v}) = 0\,, \quad \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{z} + \mathbf{w}) = 0\,;$$

ma da queste risulta (*Eléments*..., loc. cit.) che devono esistere i numeri m, n, p, funzioni di P, in guisa che

$$[16] \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathrm{grad}\,m\,, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{y} + \mathbf{v} = \mathrm{grad}\,n\,, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{z} + \mathbf{w} = \mathrm{grad}\,p\,.$$

Per un noto teorema di Clebsch (²), dati $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *esistono effettivamente* $\mathbf{x}$, ... m, ... soddisfacenti alle [16]. Dunque è possibile determinare α con le condizioni [13] e quindi *la* [12] *è soluzione generale della* [11].

3. Se la ξ della [11] deve essere una *dilatazione*, $\mathrm{V}\xi = 0$ (il suo determinante è simmetrico), allora la α della [12] non è più arbitraria,

(¹) Da queste formule risulta, per ξ dato dalla [12],

$$\mathrm{I}_1\xi = (\mathrm{rot}\,\mathbf{u}) \times \mathbf{i} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \times \mathbf{j} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{w}) \times \mathbf{k}$$

$$2\mathrm{V}\xi = (\mathrm{rot}\,\mathbf{u}) \wedge \mathbf{i} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \wedge \mathbf{j} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{w}) \wedge \mathbf{k}.$$

(²) Una dimostrazione *assoluta*, semplice e completa di questo teorema, si trova nella recente Nota del prof. Burgatti, *Risoluzione di alcuni problemi relativi ai campi vettoriali* (Acc. Sc. Ist. Bologna, 1910).

ma, per la [4], deve soddisfare alla condizione

[17] $$\Delta'(V\alpha) = V \frac{d \operatorname{grad} \alpha}{dP} .$$

La determinazione effettiva della α si fa (n. 2) mediante i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ arbitrarî nel caso generale.

Se deve esser vera la [17], *cioè* ξ *esser dilatazione, allora i vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *devono soddisfare alla condizione*

[18] $$\mathbf{i} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{j} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{k} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{k} = 0 .$$

Infatti. Per formule ben note si ha

$$2V\alpha = \mathbf{x} \wedge \mathbf{i} + \cdots + \cdots , \frac{d \operatorname{grad} \alpha}{dP} = H(\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{x} , \mathbf{i}) + \cdots + \cdots$$

e in conseguenza

$$2\Delta'(V\alpha) = (\Delta'\mathbf{x}) \wedge \mathbf{i} + \cdots + \cdots$$
$$2V \frac{d \operatorname{grad} \alpha}{dP} = (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{x}) \wedge \mathbf{i} + \cdots + \cdots ;$$

la [17] sarà dunque vera solamente quando (*O. v.*, n. 24, [17])

$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{x}) \wedge \mathbf{i} + \cdots + \cdots = 0$$

che (n. 2) coincide con la [18].

4. È facile ottenere una soluzione particolare ξ_0 della equazione

[19] $$\operatorname{grad} \xi = \mathbf{f} .$$

Invero. Si determini (teorema di Clebsch già citato) un numero m e un vettore $\mathbf{u}$ tali che

[20] $$\mathbf{f} = \operatorname{grad} m + \operatorname{rot} \mathbf{u} ;$$

basta poi porre

[21] $$\xi_0 = m - \mathbf{u} \wedge$$

perchè si abbia (*O. v.*, n. 24, [15]) dalla [20]

$$\operatorname{grad} \xi_0 = \operatorname{grad} m - \operatorname{grad} (\mathbf{u} \wedge) = \operatorname{grad} m + \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{f} .$$

Osservando allora che da

$$\operatorname{grad} \xi = \operatorname{grad} \xi_0$$

risulta $\operatorname{grad}(\xi - \xi_0) = 0$ si ha:

La soluzione generale della equazione [19] *è*

$$\xi = m - \mathbf{u} \wedge + \Delta\alpha - \frac{d \operatorname{grad} \alpha}{dP}, \tag{22}$$

ove m, $\mathbf{u}$ *soddisfano alla* [20] *ed* α *è omog. arbitraria funzione di* P.

Se si vuole che ξ sia dilatazione, $V\xi = 0$, allora α deve soddisfare alla condizione

$$\Delta'(V\alpha) = V \frac{d \operatorname{grad} \alpha}{dP} + \mathbf{u} \tag{23}$$

che risulta subito dalla [22].

Meccanica. — *Determinazione dell'equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili.* Nota di PIETRO BURGATTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Remarque relative à ma Note*: « *Solution générale du problème de développement* etc. » [1]. Nota di W. STEKLOFF, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans l'énoncé du Théorème III de ma Note, dont il s'agit, j'ai trouvé une erreur purement typographique, mais très grave, qui a privé de sens même le théorème que je voulais signaler. J'ai l'honneur de prier l'Académie de me permettre de corriger cette erreur et de rétablir l'énoncé véritable du théorème.

La formule

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k(x) \int_a^b q(x)\, f(x)\, V_k(x)\, dx}{\int_a^b q(x)\, V_k(x)\, dx},$$

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIX, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 10°, seduta del 20 novembre 1910.