ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 febbraio 1911.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle trasformazioni di Guichard delle superficie applicabili sulle quadriche.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Nella Memoria premiata: *Sur la déformation des quadriques* (1) il sig. Guichard, riunendo le sue precedenti ricerche sull'argomento, assegna due diversi gruppi di trasformazioni per le deformate delle quadriche generali. Le trasformazioni del primo gruppo richiedono l'integrazione di una equazione differenziale di Riccati e successive quadrature. Per quelle del secondo gruppo occorre un'operazione analitica più complicata (ricerca di un determinante ortogonale del 4° ordine note le rotazioni) accompagnata ancora da successive quadrature.

In quali relazioni stanno queste trasformazioni di Guichard con quelle B_k *per congruenze* W da me costruite? A questa domanda, posta giustamente dal sig. Darboux nel suo rapporto (2), siamo ora in grado, per quanto almeno concerne le trasformazioni di Guichard del primo gruppo, di rispondere completamente.

Dal confronto di miei risultati anteriori con quelli ottenuti dal sig. Servant in due Note recenti (3) si ottiene infatti il teorema seguente:

A) *Ogni trasformazione di Guichard del primo gruppo si risolve in due successive trasformazioni elementari* B_k, B'_k *col medesimo valore della*

(1) Mémoires des Savants étrangers, t. 34 (1909).

(2) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 147 (7 déc. 1908), pp. 1104-1109.

(3) *Sur les transformations des surfaces applicables sur les surfaces du second degré* (Comptes Rendus, 12 et 27 décembre 1910).

costante k e di classe opposta; viceversa la composizione di due tali trasformazioni B_k, B'_k dà sempre luogo ad una trasformazione di Guichard.

Nelle pubblicazioni sopra citate il sig. Servant dimostra come le trasformazioni di Guichard del primo gruppo equivalgano alle trasformazioni D_m, da me introdotte nel 1905 (1) come casi particolari delle *trasformazioni di Darboux* delle superficie isoterme.

Ma, nelle mie ricerche sulla deformazione delle quadriche, lo studio di queste D_m non fu che un primo passo per arrivare alle *trasformazioni* B_k *per congruenze* W, che io riguardo come le vere trasformazioni elementari della teoria. E già nella prefazione alla mia Memoria: *Théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales* (2) avevo indicato che ogni trasformazione D_m si sdoppia nel prodotto di due B_k (cfr. ivi, n. XII dell'*Aperçu*). Precisando ora il modo di composizione e confrontando coi risultati del sig. Servant, si ottiene appunto il teorema A), che qui stabiliremo per via alquanto diversa.

2. Sia S_1 una qualunque deformata della quadrica fondamentale Q, e sia S_2 un'altra tale deformata ottenuta da S_1 con una trasformazione G di Guichard del primo gruppo. Le proprietà caratteristiche della trasformazione G, quali si rilevano dalla Memoria del Guichard (cfr. anche Servant, loc. cit.), sono le seguenti:

a) Fra i punti delle due superficie S_1, S_2 è stabilita una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati.

b) Al sistema coniugato permanente (u, v) di S_1 corrisponde sopra S_2 il sistema (u, v) coniugato permanente (3).

c) Le tangenti in punti corrispondenti di S_1, S_2 alle linee (u) o alle linee (v) si incontrano.

Cerchiamo dapprima se, componendo due convenienti trasformazioni elementari B_k, si può ottenere una trasformazione colle proprietà *a*) *b*) *c*), che sarà allora una trasformazione di Guichard. In questo dobbiamo tener presente che ogni deformata S di Q dà luogo, per trasformazioni B_k, ad una doppia infinità di superficie trasformate. La prima costante k è quella che fissa la quadrica Q′ omofocale a Q, la seconda dipende dalla direzione (arbitraria) assegnata ad un raggio iniziale della corrispondente congruenza W. Si ricordi inoltre che le trasformazioni B_k si distinguono in due classi opposte, appartenendo le prime ad uno dei sistemi di generatrici di Q, le seconde al secondo.

(1) Vedi *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche* (Annali di matematica, serie 3ª, t. XI).

(2) Savants étrangers, t. 34 (1909).

(3) Per sistema coniugato permanente (u, v) di una deformata S della quadrica Q intendiamo quel sistema che resta coniugato quando S si applica sopra Q.

Ciò posto, ad una deformata iniziale S di Q applichiamo due trasformazioni B_k, B'_k corrispondenti alla medesima costante k (alla medesima quadrica omofocale Q') ma di classe opposta, e dimostriamo: *Le due superficie* S_1, S_2 *così derivate da* S *sono trasformate di Guichard l'una dell'altra.*

Intanto poichè le trasformazioni B_k conservano i sistemi coniugati, e fra questi quelli permanenti, è manifesto che nella corrispondenza fra i punti di S_1, S_2 le condizioni *a*) e *b*) sono verificate. Se ammettiamo per un momento che anche la *c*) sia soddisfatta (v. n. 3), vediamo che nel passaggio da S_1 ad S_2 abbiamo una trasformazione G di Guichard. Ora questo passaggio si può scindere nei due successivi da S_1 ad S per mezzo di una B_k, poi da S ad S_2 con una B'_k, onde la nostra G risulta dal comporre le due elementari B_k, B'_k, ciò che esprimiamo colla relazione simbolica

$$\text{(I)} \qquad G = B_k \,,\, B'_k \,.$$

Osserviamo poi che, entrando nella prima B_k una costante arbitraria (oltre k), ed una nuova nell'altra B'_k, la G composta secondo la (I) viene a dipendere da due costanti arbitrarie, e pel modo come queste vi entrano può identificarsi con una di qualunque trasformazione di Guichard, come viene asserito nella proposizione A).

Un'altra via per arrivare alla medesima conclusione consiste nel considerare due delle superficie isoterme (speciali) Σ_1, Σ_2, che la costruzione di Darboux associa alle deformate S_1, S_2 della quadrica, e nel dimostrare che Σ_1, Σ_2 sono le due falde di un inviluppo *conforme* di sfere. Così la trasformazione D_m che conduce da Σ_1 a Σ_2, ed alla quale equivale secondo Servant la trasformazione G di Guichard, resta decomposta in due B_k elementari.

3. Ritornando alla prima dimostrazione del teorema A), resta ancora da provare che per le due superficie S_1, S_2, dedotte rispettivamente da S con una B_k e con una B'_k, ha luogo la proprietà *c*). Riserbando la trattazione del caso delle quadriche a centro ad altra pubblicazione, ove si daranno altresì ulteriori sviluppi relativi al teorema di permutabilità, mi limito qui ad indicare la dimostrazione pel caso dei paraboloidi [1].

Ricorriamo per ciò alle formole delle trasformazioni per le deformate ad esempio del paraboloide iperbolico stabilito negli Annali di matematica

[1] Una dimostrazione affatto analoga a quella che segue nel testo per le deformate dei paraboloidi si può trarre per le superficie pseudosferiche (deformate della sfera immaginaria) dalle formole per la composizione delle trasformazioni di Bäcklund date al § 383, vol. II delle mie *Lezioni*. Così si dimostra: *Se le superficie pseudosferiche* S_1, S_2 *derivano da una medesima* S *per trasformazioni opposte di Bäcklund* B_σ, $B_{-\sigma}$, *le tangenti alle linee di curvatura corrispondenti di* S_1, S_2 *si incontrano.* E si osservi che qui le linee di curvatura dànno appunto il sistema coniugato permanente.

1906 [1], particolarmente ai paragrafi 9 e 20 di questa Memoria. Sia S una deformata del paraboloide, S_1 una sua trasformata per la trasformazione B_σ, ed $\overline{S}_1$ un'altra trasformata di S per la $B_{-\sigma}$, che corrisponde appunto alla medesima quadrica omofocale come la B_σ, ma al sistema opposto di generatrici. Colle notazioni del § 20, Mem. cit., avremo per la superficie S_1

$$x_1 = a + \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \tag{1}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{k}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}\,\mu\lambda_1 . X \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{k}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}\,\lambda\mu_1 . X , \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dove L , M , P , Q hanno i valori dati dalle (67) § 20, Mem. cit. E formole come le precedenti avremo per la $\overline{S}_1$, per la quale indicheremo le quantità corrispondenti con

$$\overline{x}_1 , \overline{\lambda}_1 , \overline{\mu}_1 , ... , \overline{L} , \overline{M} , \overline{P} , \overline{Q} , ...$$

Ora il sistema (u , v) è appunto, tanto sulla S_1 che sulla $\overline{S}_1$, il sistema coniugato permanente, e per verificare che ha luogo la proprietà $c)$ n. 2 basta provare che si annullano i due determinanti

$$\begin{vmatrix} x_1 - \overline{x}_1 & y_1 - \overline{y}_1 & z_1 - \overline{z}_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \overline{x}_1}{\partial u} & \frac{\partial \overline{y}_1}{\partial u} & \frac{\partial \overline{z}_1}{\partial u} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} x_1 - \overline{x}_1 & y_1 - \overline{y}_1 & z_1 - \overline{z}_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \overline{x}_1}{\partial v} & \frac{\partial \overline{y}_1}{\partial v} & \frac{\partial \overline{z}_1}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

Colle formole citate l'annullarsi di questi due determinanti equivale alle due relazioni

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \overline{\lambda}_1 & \mu_1 - \overline{\mu}_1 \\ \overline{A} - A & C - \overline{C} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \overline{\lambda}_1 & \mu_1 - \overline{\mu}_1 \\ \overline{B} - B & D - \overline{D} \end{vmatrix} = 0$$

e queste, ricorrendo alle formole (35) § 9, Mem. cit., equivalgono all'unica

$$\begin{vmatrix} A - \overline{A} & B - \overline{B} \\ C - \overline{C} & D - \overline{D} \end{vmatrix} = 0 . \tag{3}$$

[1] *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi.*

Se si prendono gli effettivi valori di A, B, C, D dati dalle (33) § 9, Mem. cit., dai quali si deducono quelli di $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ cangiando σ in $-\sigma$ e θ_1 in $\overline{\theta}_1$, si verifica subito che il determinante (3) si annulla, e la proprietà *c*) risulta stabilita.

4. Riprendiamo in generale la considerazione di una deformata S della quadrica Q e di due sue trasformate S_1, S_2 per mezzo delle B_k, B'_k. Sappiamo dal teorema di permutabilità che esiste una quarta deformata S' legata alla S_1 da una B'_k di seconda specie, ed alla S_2 da una B_k di prima specie [1]. Ora la coppia (S, S') si trova nelle medesime condizioni della (S_1, S_2); vediamo quindi che: *Ogni coppia* (S_1, S_2) *di deformate della quadrica* Q *legate da una trasformazione* G *di Guichard individua una tale seconda coppia* (S, S'); *le quattro deformate* S, S_1, S_2, S' *formano una quaderna del teorema di permutabilità, corrispondente al caso particolare di due trasformazioni* B_k *colla stessa costante* k *e di classe opposta.*

Si può dire insomma che, nel metodo di Guichard, fra le quattro deformate luogo dei vertici del quadrilatero del teorema di permutabilità viene diretta l'attenzione soltanto sopra due superficie luogo di due vertici opposti. Invece la considerazione di tutte quattro le superficie e del passaggio da una qualunque di esse ad un'altra *contigua* conduce alle trasformazioni elementari B_k.

5. Fra le trasformazioni G di Guichard del primo gruppo ve ne ha una che l'autore ottiene per mezzo delle così dette *congruenze* K, 20 e sulle cui proprietà geometriche egli richiama particolarmente l'attenzione (Mémoire, p. 2, et Rapport de M. Darboux, p. 1107). È facile riconoscere che queste particolari trasformazioni G corrispondono, nella formola di decomposizione (I), al caso in cui la quadrica omofocale Q' appartenente alle due trasformazioni componenti, si riduce ad una delle coniche focali, cioè al caso in cui le B_k, B'_k sono trasformazioni singolari.

Si consideri infatti una deformata S della quadrica Q e le sue ∞^1 trasformate S_1 per mezzo di una trasformazione singolare B_k, appartenente ad una conica focale C. Il luogo dei punti M_1 della S_1, corrispondenti ad un medesimo punto M di S, è una retta r nel piano tangente in M alla S, precisamente quella in cui, quando Q rotola sopra S e viene a toccare S in M, il piano della conica C viene ad intersecare il detto piano tangente. Di più i piani tangenti nei punti M_1 della retta r alle S_1 inviluppano il cono che da M projetta la conica focale C, trascinata nel rotolamento. In fine risulta da un teorema generale di Darboux (*Leçons*, t. IV, pag. 135) che le sviluppabili delle congruenze delle rette r corrispondono al sistema coniugato permanente di S, quindi anche a quello di una qualunque S_1;

[1] Soltanto nel caso del n. seguente di trasformazioni B_k singolari la S' coincide con S.

le dette sviluppabili segano adunque ciascuna superficie S_1 nel suo sistema coniugato permanente. Queste sono in sostanza le proprietà caratteristiche di queste speciali trasformazioni di Guichard, che fanno passare da una di queste deformate S_1 ad un'altra. Possiamo dunque dire:

Le trasformazioni di Guichard per congruenze K, 2O *risultano dal comporre due trasformazioni* B_k *singolari, corrispondenti alla medesima conica focale.*

6. Le considerazioni sopra esposte pongono, mi sembra, sufficientemente in luce le relazioni delle trasformazioni G di Guichard del primo gruppo, colle mie B_k per congruenze W, e confermano che queste ultime compiono l'ufficio di trasformazioni elementari.

Se si confrontano i due metodi di trasformazione, quello per trasformazioni G coll'altro per le B_k, applicati ad una deformata iniziale qualunque S di una quadrica, è ben chiaro che il primo dà solo una piccola parte delle superficie trasformate ottenute col secondo, ed invero quelle soltanto che risultano dal comporre coppie di trasformazioni B_k, le due di ciascuna coppia appartenendo inoltre alla medesima quadrica omofocale ed a sistemi opposti di generatrici. In particolare, confrontando i due metodi nel caso che la quadrica Q sia una sfera (immaginaria) e le trasformazioni elementari considerate siano le complementari, vediamo che il primo metodo porta ad eseguire solo potenze della trasformazione complementare con esponente pari.

Restano per altro ancora da considerare le trasformazioni di Guichard del secondo gruppo, delle cui eventuali relazioni colle B_k nulla è noto finora. Ritengo probabile che anche queste debbano risolversi in prodotti di trasformazioni B_k; ma alla loro natura analitica più complicata deve corrispondere un modo più complesso di decomposizione in trasformazioni elementari.

Fisica-matematica. — *Sulla distribuzione dell'elettricità in equilibrio nei conduttori.* Nota del Corrisp. E. ALMANSI.

1. Aggiungo ad una Nota di ugual titolo pubblicata in questi Rendiconti (a. 1910, 2° sem., fasc. 11°) alcune osservazioni le quali permettono di dare al problema ivi considerato una risoluzione ancora più semplice.

Si avevano due superficie chiuse, σ e σ_0, questa contenuta nell'interno di quella, e si trattava di distribuire sulla superficie esterna σ una massa M in modo che in tutto lo spazio S_0, limitato da σ_0, la grandezza della forza risultasse inferiore od uguale ad un numero assegnato ε.

Abbiamo perciò considerata una terza superficie τ, compresa fra σ e σ_0, non avente, nè con σ nè con σ_0, punti a comune; ed abbiamo detto φ il potenziale di una massa uguale ad M situata sulla superficie τ. Questa massa M poteva essere distribuita in modo arbitrario; ma noi stabiliremo