ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

le dette sviluppabili segano adunque ciascuna superficie S_1 nel suo sistema coniugato permanente. Queste sono in sostanza le proprietà caratteristiche di queste speciali trasformazioni di Guichard, che fanno passare da una di queste deformate S_1 ad un'altra. Possiamo dunque dire:

Le trasformazioni di Guichard per congruenze K, 2O *risultano dal comporre due trasformazioni* B_k *singolari, corrispondenti alla medesima conica focale.*

6. Le considerazioni sopra esposte pongono, mi sembra, sufficientemente in luce le relazioni delle trasformazioni G di Guichard del primo gruppo, colle mie B_k per congruenze W, e confermano che queste ultime compiono l'ufficio di trasformazioni elementari.

Se si confrontano i due metodi di trasformazione, quello per trasformazioni G coll'altro per le B_k, applicati ad una deformata iniziale qualunque S di una quadrica, è ben chiaro che il primo dà solo una piccola parte delle superficie trasformate ottenute col secondo, ed invero quelle soltanto che risultano dal comporre coppie di trasformazioni B_k, le due di ciascuna coppia appartenendo inoltre alla medesima quadrica omofocale ed a sistemi opposti di generatrici. In particolare, confrontando i due metodi nel caso che la quadrica Q sia una sfera (immaginaria) e le trasformazioni elementari considerate siano le complementari, vediamo che il primo metodo porta ad eseguire solo potenze della trasformazione complementare con esponente pari.

Restano per altro ancora da considerare le trasformazioni di Guichard del secondo gruppo, delle cui eventuali relazioni colle B_k nulla è noto finora. Ritengo probabile che anche queste debbano risolversi in prodotti di trasformazioni B_k; ma alla loro natura analitica più complicata deve corrispondere un modo più complesso di decomposizione in trasformazioni elementari.

Fisica-matematica. — *Sulla distribuzione dell'elettricità in equilibrio nei conduttori*. Nota del Corrisp. E. ALMANSI.

1. Aggiungo ad una Nota di ugual titolo pubblicata in questi Rendiconti (a. 1910, 2° sem., fasc. 11°) alcune osservazioni le quali permettono di dare al problema ivi considerato una risoluzione ancora più semplice.

Si avevano due superficie chiuse, σ e σ_0, questa contenuta nell'interno di quella, e si trattava di distribuire sulla superficie esterna σ una massa M in modo che in tutto lo spazio S_0, limitato da σ_0, la grandezza della forza risultasse inferiore od uguale ad un numero assegnato ε.

Abbiamo perciò considerata una terza superficie τ, compresa fra σ e σ_0, non avente, nè con σ nè con σ_0, punti a comune; ed abbiamo detto φ il potenziale di una massa uguale ad M situata sulla superficie τ. Questa massa M poteva essere distribuita in modo arbitrario; ma noi stabiliremo ora che essa sia concentrata in un punto Q_0 di τ; e introdotta, come nella Nota precedente, la quantità

$$A = \int_S \Delta\varphi \, dS,$$

supporremo di determinare la posizione di Q_0 in maniera che A assume il valore *minimo*.

Dal potenziale φ siamo passati al potenziale φ_1 ponendo $\varphi_1 = \varphi - ap$, ove a denota una costante, p il potenziale di due masse $+1$ e -1, situata in due punti Q e Q' di τ. Dunque φ_1 sarà il potenziale di *tre* masse, M, $-a$ e $+a$, situate in tre punti, Q_0, Q e Q', di τ. Il potenziale successivo φ_2 sarà dovuto a *cinque* masse situate in altrettanti punti di τ; e così di seguito. In generale, il potenziale φ_i sarà dovuto a $2i + 1$ masse situate in $2i + 1$ punti di τ. E la somma algebrica di queste masse sarà sempre uguale ad M.

Determinate convenientemente la costante a, la coppia di punti Q e Q', e le successive costanti e coppie di punti analoghe, si è veduto che per un valore di i abbastanza grande, la massa M, distribuita sulla superficie σ con densità

$$h_i = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \qquad (n = \text{norm. est.}),$$

dà luogo ad una forza la cui grandezza in nessun punto di S_0 è superiore ad ε.

Ora mostrerò che, dato ε, si può determinare *a priori* un numero intero I per il quale è soddisfatta questa condizione, che esiste un numero intero $i \leqq I$ a cui corrisponde un potenziale φ_i, e quindi una distribuzione della massa M sulla superficie σ (con densità h_i) che nello spazio S_0 dà luogo ad una forza non superiore, in alcun punto, ad ε.

Si presenta allora naturalmente un procedimento più semplice per la risoluzione del problema. Invece di calcolare tutti i potenziali $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, ecc., consideriamo senz'altro un potenziale, che diremo Φ, dovuto a $K = 2I + 1$ masse, la cui somma sia uguale ad M, situate in K punti di τ; e posto

$$H = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial n},$$

determiniamo i valori e le posizioni di queste K masse in maniera che la forza F, dovuta alla massa M distribuita sulla superficie σ con densità H, risulti, in tutto lo spazio S_0, uguale ad ε, o minore. Ciò è possibile. Infatti, essendo $i \leqq I$, e quindi $2i + 1 \leqq 2I + 1$, si potrà, per esempio, supporre che soltanto $2i + 1$, delle $2I + 1$ masse da cui ha origine la densità H, siano diverse da zero, e che esse abbiano precisamente quei valori e quelle posizioni a cui corrisponde la densità h_i.

Non conoscendosi il numero i (di cui si sa soltanto che è $\leqq 1$), per esser certi che la condizione $F \leqq \varepsilon$ risulti verificata, stabiliremo di dare alle K masse da cui ha origine la densità H, valori e posizioni tali che nello spazio S_0 *il massimo valore della forza* F *sia il più piccolo possibile.*

Il problema si riduce così a determinare il numero intero I, e con esso l'altro numero intero K.

2. Consideriamo la formula (4) della Nota precedente, e le successive I analoghe, I rappresentando per ora un numero intero qualunque:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A - \alpha\,, \\
A_2 &= A_1 - \alpha_1\,, \\
&\ldots\ldots \\
A_{I+1} &= A_I - \alpha_I\,.
\end{aligned}
$$

Sommando membro a membro avremo:

$$A_{I+1} = A - (\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_I)\,,$$

ovvero:

$$\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_I = A - A_{I+1}\,;$$

d'onde si deduce, poichè A_{I+1} è una quantità (come A, A_1, ecc.) essenzialmente positiva:

$$\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_I < A\,.$$

Da questa disuguaglianza segue che almeno una delle $I+1$ quantità *positive* (v. Nota precedente) α, α_1, ... α_I, deve essere minore di $\dfrac{A}{I+1}$. Sia

(1) $$\alpha_i \leqq \frac{A}{I+1}\,,$$

ove i rappresenti un numero intero $\leqq I$ (od anche lo zero, intendendosi che α_0 sia uguale ad α). Ricordiamo poi la formula (9) della Nota prec.:

(2) $$D_i^2 \leqq \frac{L}{16\pi^2}\alpha_i\,,$$

nella quale L denota il limite superiore della quantità $\int_S \triangle p\, dS$, D_i la differenza fra il massimo e il minimo valore che assume sopra τ il potenziale V_i dovuto alla massa M distribuita sulla superficie σ con densità h_i. Dalle disuguaglianze (1) e (2) deduciamo l'altra:

$$D_i^2 \leqq \frac{LA}{16\pi^2(I+1)}\,.$$

Sia η un numero positivo, al quale assegneremo più avanti il valore. E supponiamo il numero intero I così grande che si abbia:

$$\frac{\mathrm{LA}}{16\pi^2(\mathrm{I}+1)} \leqq \eta^2. \tag{3}$$

Sarà $\mathrm{D}_i^2 \leqq \eta^2$, quindi $\mathrm{D}_i \leqq \eta$. Diciamo G_i il valore del potenziale U_i in un punto qualunque dello spazio T limitato dalla superficie τ; e poniamo $\mathrm{U}_i = \mathrm{G}_i + u_i$. Il valore assoluto di u_i sarà minore di η, o al più uguale, in tutto lo spazio T.

Se ϱ rappresenta la minima distanza fra le superficie σ_0 e τ, un punto qualunque P_0 appartenente allo spazio S_0 limitato da σ_0 potremo considerarlo come centro di una sfera di raggio ϱ tutta contenuta entro τ. Consideriamo nel punto P_0 la forza F_i dovuta alla massa M distribuita sulla superficie σ con densità h_l. Le sue componenti sono le derivate di U_i, ossia quella di u_i, rispetto alle coordinate x, y, z, cambiate di segno. Noi potremo quindi esprimere F_i mediante i valori che assume u_i sulla superficie della sfera. Essendo $|u_i| \leqq \eta$, sarà nel punto P_0, e per conseguenza in un punto qualunque di S_0,

$$\mathrm{F}_i \leqq \mathrm{E}\eta,$$

ove E rappresenta una quantità (dipendente solo da ϱ) che sarebbe facile calcolare ricordando la formula di risoluzione del problema di Dirichlet per la sfera: ciò che, per brevità, tralascio.

Ora fissiamo il valore di η. Prendiamo $\eta = \frac{\varepsilon}{\mathrm{E}}$, ossia $\mathrm{E}\eta = \varepsilon$. Sarà, in tutto lo spazio S_0, $\mathrm{F}_i \leqq \varepsilon$. E la condizione (3) diventerà:

$$\frac{\mathrm{LA}}{16\pi^2(\mathrm{I}+1)} \leqq \frac{\varepsilon^2}{\mathrm{E}^2}. \tag{4}$$

Basta dunque assumere un numero intero I così grande che soddisfi alla condizione precedente, per esser certi dell'esistenza di un altro numero intero $i \leqq \mathrm{I}$ a cui corrisponde una distribuzione della massa M sulla superficie σ che in tutti i punti di S_0 dà luogo ad una forza $\mathrm{F}_i \leqq \varepsilon$.

3. Introduciamo il numero intero $\mathrm{K} = 2\mathrm{I} + 1$: la condizione (4) potrà scriversi:

$$\frac{\mathrm{LA}}{8\pi^2(\mathrm{K}+1)} \geqq \frac{\varepsilon^2}{\mathrm{E}^2};$$

od anche:

$$\mathrm{K} \geqq \frac{\mathrm{LAE}^2}{8\pi^2\varepsilon^2} - 1.$$

E converrà supporre che K rappresenti il più piccolo numero intero che soddisfa a questa condizione.

Ricordando le cose dette nel § 1 possiamo dunque concludere che per la risoluzione del problema proposto si deve:

1°, *determinare il numero intero* K;

2°, *distribuire sulla superficie* τ, *compresa fra* σ *e* σ_0, K *masse, la cui somma sia uguale ad* M, *in modo che, detto* Φ *il loro potenziale, e posto* $H = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, *nello spazio* S_0 *il massimo valore della forza* F *dovuto alla massa* M *distribuita sulla superficie* σ *con densità* H *sia il più piccolo possibile.*

Saremo allora certi che in tutto lo spazio S_0 risulterà $F \leqq \varepsilon$.

Fisica-Matematica. — *Sopra un particolare fenomeno di diffusione.* Nota del Corrispondente ANTONIO GARBASSO.

Patologia vegetale. — *La Morìa dei castagni (mal dell'inchiostro). Osservazioni critiche alla Nota dei signori Griffon e Maublanc.* Nota del Socio G. BRIOSI e di R. FARNETI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide.* Nota I di A. SIGNORINI, presentata dal Socio P. PIZZETTI.

In questa Nota ci proponiamo di dimostrare rigorosamente la formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide, supposto poco differente da una sfera S_1, quando siano note le anomalie che la gravità osservata alla superficie del Geoide presenta rispetto ai valori teorici, supposti noti, che le competerebbero se il Geoide coincidesse con una superficie S di riferimento fissata, anch'essa poco differente dalla sfera S_1.

La dimostrazione originale di Stokes manca di rigore; ed anche la dimostrazione del prof. Pizzetti [1], come egli stesso ci ha fatto osservare,

[1] *Intorno alla determinazione teorica della gravità alla superficie terrestre.* Atti d. R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI.