ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

E converrà supporre che K rappresenti il più piccolo numero intero che soddisfa a questa condizione.

Ricordando le cose dette nel § 1 possiamo dunque concludere che per la risoluzione del problema proposto si deve:

1°, *determinare il numero intero* K;

2°, *distribuire sulla superficie* τ, *compresa fra* σ *e* σ_0, K *masse, la cui somma sia uguale ad* M, *in modo che, detto* Φ *il loro potenziale, e posto* $H = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial n}$, *nello spazio* S_0 *il massimo valore della forza* F *dovuto alla massa* M *distribuita sulla superficie* σ *con densità* H *sia il più piccolo possibile.*

Saremo allora certi che in tutto lo spazio S_0 risulterà $F \leqq \varepsilon$.

Fisica-Matematica. — *Sopra un particolare fenomeno di diffusione.* Nota del Corrispondente ANTONIO GARBASSO.

Patologia vegetale. — *La Morìa dei castagni (mal dell'inchiostro). Osservazioni critiche alla Nota dei signori Griffon e Maublanc.* Nota del Socio G. BRIOSI e di R. FARNETI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide.* Nota I di A. SIGNORINI, presentata dal Socio P. PIZZETTI.

In questa Nota ci proponiamo di dimostrare rigorosamente la formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide, supposto poco differente da una sfera S_1, quando siano note le anomalie che la gravità osservata alla superficie del Geoide presenta rispetto ai valori teorici, supposti noti, che le competerebbero se il Geoide coincidesse con una superficie S di riferimento fissata, anch'essa poco differente dalla sfera S_1.

La dimostrazione originale di Stokes manca di rigore; ed anche la dimostrazione del prof. Pizzetti (1), come egli stesso ci ha fatto osservare,

(1) *Intorno alla determinazione teorica della gravità alla superficie terrestre.* Atti d. R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI.

lascia qualche dubbio sulla validità della formola in questione, finchè non si provi che, indicando, secondo il solito, con θ, v e θ', v' le coordinate polari sferiche di due punti della sfera di raggio 1, la serie

$$\sum_2^\infty \frac{2n+1}{n-1} \mathrm{P}_n(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v')\,f(\theta'\,,v') \tag{1}$$

— ove i P_n sono i soliti coefficienti di Laplace, e $f(\theta', v')$ è una funzione di θ', v' indipendente da n e finita, continua, e, se occorre, soddisfacente anche ad altre condizioni di regolarità — considerata come funzione di θ', v', è integrabile termine a termine sulla sfera di raggio 1.

1. La serie (1), quando al sistema di coordinate (θ', v') si sostituisca un nuovo sistema di coordinate polari sferiche (γ, ω) col polo nel punto (θ, v), posto $f(\theta', v') = \mathrm{F}(\gamma, \omega)$, prende la forma

$$\sum_2^\infty \frac{2n+1}{n-1} \mathrm{P}_n(\cos\gamma)\,\mathrm{F}(\gamma\,,\omega)\,.$$

D'altra parte la serie

$$\sum_2^\infty \frac{2n+1}{n-1} \mathrm{P}_n(\cos\gamma)$$

è convergente, ed anzi (v. Pizzetti, Nota cit., § 5) facilmente se ne trova la forma che è data da

$$\Phi(\cos\gamma) = \operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2} + 1 - 5\cos\gamma - 6\sin\frac{\gamma}{2} + 3\cos\gamma\log\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Posto

$$\cos\gamma = x$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\gamma\,,\omega)\,d\omega = \psi(x)\,,$$

avremo dunque certamente, indicando, secondo il solito, con $\mathrm{X}_n(x)$ i coefficienti di Legendre,

$$\int_0^{2\pi} d\omega \left\{ \sum_2^\infty \frac{2n+1}{n-1} \mathrm{P}_n(\theta v\,;\,\theta' v')\,f(\theta' v') \right\} = \sum_2^\infty \frac{2n+1}{n-1} \mathrm{X}_n(x)\,\psi(x)\,,$$

ove la $\psi(x)$ potrà supporsi, oltre che finita e continua, anche dotata di un numero finito di oscillazioni in tutto l'intervallo $(-1\,, 1)$ in cui può variare x.

Ora si dimostra senza difficoltà (1) che si ha

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\Phi(x)\,X_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n<2 \\ \dfrac{2n+1}{n-1} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

La possibilità di integrare termine a termine la serie (1) resterà dunque provata una volta dimostrato il teorema seguente:

(1) Poniamo

$$d_{\xi,x} = \sqrt{1+\xi^2-2\xi x}:$$

avremo allora, come è ben noto,

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{d_{\xi,x}} - 1 - \xi x = \sum_{2}^{\infty} \xi^n X_n(x),$$

e quindi anche, almeno se $|\xi|<1$,

$$(\beta) \qquad \int_0^{\xi}\left(\frac{1}{d_{\xi',x}} - 1 - \xi' x\right)\frac{d\xi'}{\xi'^2} = \sum_{2}^{\infty}\frac{X_n(x)}{n-1}\xi^{n-1}.$$

Ma, essendo la serie $\sum\limits_{2}^{\infty}\dfrac{X_n(x)}{n-1}$ per $x \neq 1$ sempre convergente, sarà pure

$$\int_0^{1}\left(\frac{1}{d_{\xi',x}} - 1 - \xi' x\right)\frac{d\xi'}{\xi'^2} = \sum_{2}^{\infty}\frac{X_n(x)}{n-1},$$

e quindi

$$\Phi(x) = \sum_{2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}X_n(x) = 2\sum_{2}^{\infty}X_n(x) + 3\sum_{2}^{\infty}\frac{X_n(x)}{n-1} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{d_{1,x}} - 1 - x\right) + 3\int_0^{1}\left(\frac{1}{d_{\xi',x}} - 1 - \xi' x\right)\frac{d\xi'}{\xi'^2}.$$

D'altra parte dalle (α) (β) segue immediatamente, per $|\xi|<1$,

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}X_n(x)\left(\frac{1}{d_{\xi,x}} - 1 - \xi x\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n<2 \\ \xi^n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}X_n(x)\,dx\int_0^{\xi}\left(\frac{1}{d_{\xi',x}} - 1 - \xi' x\right)\frac{d\xi'}{\xi'^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n<2 \\ \dfrac{\xi^{n-1}}{n-1} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

e di più facilmente si vede che

$$\lim_{\xi=1}\int_{-1}^{1}X_n(x)\left(\frac{1}{d_{\xi,x}} - 1 - \xi x\right)dx = \int_{-1}^{1}X_n(x)\left(\frac{1}{d_{1,x}} - 1 - x\right)dx$$

$$\lim_{\xi=1}\int_{-1}^{1}X_n(x)\,dx\int_0^{\xi}\left(\frac{1}{d_{\xi',x}} - 1 - \xi' x\right)\frac{d\xi'}{\xi'^2} = \int_{-1}^{1}X_n(x)\,dx\int_0^{1}\left(\frac{1}{d_{\xi',x}} - 1 - \xi' x\right)\frac{d\xi'}{\xi'^2}.$$

Sarà dunque infine

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\Phi(x)\,X_n(x)\,dx = (2n+1)\int_{-1}^{1}X_n(x)\left(\frac{1}{d_{1,x}} - 1 - x\right)dx +$$

$$+\frac{3}{2}(2n+1)\int_{-1}^{1}X_n(x)\,dx\int_0^{1}\left(\frac{1}{d_{\xi',x}} - 1 - \xi' x\right)\frac{d\xi'}{\xi'^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n<2 \\ \dfrac{2n+1}{n-1} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

c. d. d.

Sia $f(x)$ una funzione di x nell'intervallo $(-1, 1)$, la quale:

1°) *è sempre finita e continua insieme alla sua derivata prima $f'(x)$, fatta eccezione al più pel punto $x = 1$ ove, m essendo un numero determinato < 1, $f(x)$ diviene infinita di ordine non superiore a $\frac{1}{(1-x)^{1+m}}$* (¹);

2°) *presenta nell'intervallo totale $(-1, 1)$ un numero finito di oscillazioni.*

Sia poi $\psi(x)$ una funzione di x che nell'intervallo $(-1, 1)$ soddisfa alle condizioni di Dirichlet.

Avremo allora, per $-1 \leq c \leq 1$,

$$(2) \qquad \int_c^1 f(x)\,\psi(x)\,dx = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(\alpha)\,X_n(\alpha)\,d\alpha \int_c^1 \psi(x)\,X_n(x)\,dx\,.$$

Non sarebbe difficile vedere che questo teorema non è un caso ben particolare del teorema del prof. Dini (²) relativo all'integrazione termine a termine delle serie di funzioni H soddisfacenti all'equazione differenziale lineare del 2° ordine dipendente da un parametro

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dH}{dx}\right] + [F(x)\,\nu(z) + F_1(x)]\,H = 0\,.$$

Nondimeno, siccome le considerazioni che valgono a dimostrare tale teorema del prof. Dini si riducono ben semplici nel caso particolare in questione, noi daremo per intero la dimostrazione della formola (2).

2. Cominciamo dal porre in evidenza una proprietà dell'integrale

$$\int_0^t \left[\sum_0^n{}_i \frac{2i+1}{2} X_i(x)\,X_i(x+t')\right] dt'$$

che è essenziale per quanto segue.

Posto, per brevità di scrittura,

$$\varphi(t, x, h_n) = \sum_0^n{}_i \frac{2i+1}{2} X_n(x)\,X(x+t)\,,$$

servendosi della nota formola ricorrente

$$(i+1)\,X_{i+1} - (2i+1)\,xX_i + iX_{i-1} = 0\,,$$

(¹) Ciò che porta in particolare che $f(x)$, se diviene infinita per $x = 1$, lo diviene d'ordine non superiore a $\frac{1}{(1-x)^m}$ e quindi resta atta all'integrazione insieme alla funzione dei suoi valori assoluti.

(²) Dini, *Sviluppi in serie di funzioni* H *che soddisfano all'equazione del 2° ordine*: $\frac{d}{dx}\left(K\frac{dH}{dx}\right) + [F(x)\,\nu(z) + F_1(x)]\,H = 0$ (pp. 186 e segg.).

si trova subito:

$$\varphi(t\,,x\,,h_n)=\frac{n+1}{2}\,\frac{X_{n+1}(x+t)\,X_n(x)-X_{n+1}(x)\,X_n(x+t)}{t}\,.$$

Di qui, servendosi del 2° teorema del valor medio, e della nota formola

$$\int_p^q X_n(x)\,dx=\int_p^q\frac{X_{n+1}(x)-X_{n-1}(x)}{2n+1}\,,$$

si deduce immediatamente che se $t_1\,,t_2$ sono due valori di t diversi da zero e dello stesso segno, se indichiamo con ε un numero positivo tale che sia contemporaneamente

$$\varepsilon<|t_1|\quad,\quad\varepsilon<|t_2|,$$

avremo

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t\,,x\,,h_n)\,dt<\frac{1}{\varepsilon}\,X_n(x)\,\frac{n+1}{2n+3}+\frac{1}{\varepsilon}\,X_{n+1}(x)\,\frac{n+1}{2n+1}\,.$$

Di più, in base alla formola ora ricordata si vede che si ha

$$\int_0^{1-x}\varphi(t\,,x\,,h_n)\,dt=\quad\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,X_n(x)\,X_{n+1}(x)$$

$$\int_0^{-1-x}\varphi(t\,,x\,,h_n)\,dt=-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\,X_n(x)\,X_{n+1}(x)\,.$$

Possiamo dunque concludere che: *fissato un numero ε positivo, piccolo ad arbitrio, se facciamo variare x tra $-1+\varepsilon$ e $1-\varepsilon$ e contemporaneamente t fra $-1-x$ e $x-\varepsilon$ e tra $x+\varepsilon$ e $1-\varepsilon$, al crescere indefinito di n l'integrale*

$$\int_0^t\varphi(t'\,,x\,,h_n)\,dt'$$

convergerà in egual grado verso il suo limite per $n=\infty$ (che sarà $\pm\frac{1}{2}$, secondochè $t\gtrless 0$).

È inoltre ben noto [1] che, qualunque siano i valori dati ad $x\,,n\,,t$, l'integrale in questione si mantiene sempre inferiore a un numero finito.

3. Premesso tutto questo, veniamo a dimostrare la formola (2). Fissato un numero ε positivo piccolo ad arbitrio, indichiamo con M_ε il massimo della funzione $f_1(x)$ dei valori assoluti di $f(x)$ nell'intervallo $(-1\,,1-\varepsilon)$, moltiplicato pel numero delle oscillazioni di $f(x)$ nell'intervallo totale $(-1\,,1)$.

Indichiamo inoltre in generale con $\frac{1}{2}\,\sigma_\alpha^{(n)}$ il limite superiore dei valori assoluti della differenza

$$\frac{1}{2}-\left|\int_0^t\varphi(t'\,,x\,,h_n)\,dt'\right|\,,$$

[1] V. ad es. Dini, *Serie di Fourier*, § 116.

quando x varia tra $-1+a$ e $1-a$, e contemporaneamente t varia tra $-1-x$ e $1-x$, mantenendosi discosto da x più di a;

con J_b il valore di $\int_{1-b}^{1} f_1(x)\,dx$.

Di più indichiamo con K il limite superiore dei valori assoluti di $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t, x, h_n)$ per tutti i valori che possono darsi a t_1, t_2, x, n; con N il limite superiore dei valori di $\psi(x)$ nell'intervallo $(-1, 1)$, moltiplicato pel numero delle oscillazioni di $\varphi(x)$ nell'intervallo stesso; con θ una quantità che in valore assoluto non supera l'unità.

Infine, $x = k$ essendo un punto determinato e, del resto, qualunque, interno all'intervallo $(c, 1)$, indichiamo con $\overline{\mathrm{M}}$ il massimo di $f_1(x)$ nell'intervallo $(-1, k)$, moltiplicato pel numero delle oscillazioni di $f_1(x)$ in tale intervallo.

Introdotte queste notazioni, si vede subito che, almeno se x appartiene all'intervallo $(c+2\varepsilon, 1-2\varepsilon)$, sarà

$$\int_{x-\varepsilon^2}^{x+\varepsilon^2} \{ f(\alpha) - f(x) \} \varphi(\alpha - x, x, h_n)\, d\alpha < 2\mathrm{K}\varepsilon^2 f'(1-\varepsilon).$$

Ne segue

$$\int_{c+2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} \psi(x)\,dx \int_{-1}^{1} f(\alpha)\,\varphi(\alpha - x, x, h_n)\,d\alpha =$$

$$= \int_{c+2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} \psi(x)\,dx \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon^2} + \int_{x-\varepsilon^2}^{x+\varepsilon^2} + \int_{x+\varepsilon^2}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1} \right\} f(\alpha)\,\varphi(\alpha - x, x, h_n)\,d\alpha =$$

$$= 6\theta_1 \mathrm{NM}_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^2}^{(n)} + 4\theta_2 \mathrm{NK}\varepsilon^2 f'(1-\varepsilon) + \int_{c+2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} \psi(x)\,f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{c+2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} \psi(x)\,dx \int_{1-\varepsilon}^{1} f(\alpha)\,\varphi(\alpha - x, x, h_n)\,d\alpha;$$

e poichè nell'integrale $\int_{c+2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} \psi(x)\,dx \int_{1-\varepsilon}^{1} f(\alpha)\,\varphi(\alpha - x, x, h_n)\,d\alpha$ si potrà sempre invertire l'ordine delle integrazioni, anche se $f(x)$ per $x = 1$ diviene infinita, perchè, fissato n, potremo sempre determinare $\bar{\delta}$ in modo che, se $\delta \leq \bar{\delta}$ per qualunque valore di x l'integrale $\int_{1-\delta}^{1} f(\alpha)\,\varphi(\alpha - x, x, h_n)\,d\alpha$ risulti piccolo ad arbitrio, sarà pure

$$\int_{c+2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} \psi(x)\,dx \int_{-1}^{1} f(\alpha)\,\varphi(\alpha - x, x, h_n)\,d\alpha =$$

$$= \int_{c+2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} f(x)\,\psi(x)\,dx + 6\theta_1 \mathrm{NM}_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^2}^{(n)} + 4\theta_2 \mathrm{NK}\varepsilon^2 f'(1-\varepsilon) + \theta_3 \mathrm{J}_\varepsilon \mathrm{NK}.$$

Analogamente si trova

$$\int_c^{c+2\varepsilon} \psi(x)\, dx \int_{-1}^{1} f(\alpha)\, \varphi(\alpha - x\,, x\,, h_n)\, d\alpha =$$
$$= 2\varepsilon\, \theta_4\, \mathrm{N\overline{M}K} + \theta_5(1-k)\, \mathrm{M}_\varepsilon \mathrm{N}\sigma_\varepsilon^{(n)} + \theta_6 \mathrm{J}_\varepsilon \mathrm{NK}$$

$$\int_{1-2\varepsilon}^{1} \psi(x)\, dx \int_{-1}^{1} f(\alpha)\, \varphi(\alpha - x\,, x\,, h_n)\, d\alpha =$$
$$= 2\varepsilon\, \theta_7\, \mathrm{N\overline{M}K} + \theta_8(1-k)\, \mathrm{M}_\varepsilon \mathrm{N}\sigma_\varepsilon^{(n)} + \theta_9 \mathrm{J}_{3\varepsilon} \mathrm{NK}\,.$$

Dopo ciò, essendo, come più avanti abbiamo visto, $\lim_{n=\infty} \sigma_\alpha^{(n)} = 0$, potremo concludere evidentemente che si ha

$$\lim_{n=\infty} \int_c^1 \psi(x)\, dx \int_{-1}^{1} f(\alpha)\, \varphi(\alpha - x\,, x\,, h_n)\, dx = \int_{c+2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} \psi(x)\, f(x)\, dx + \Delta_\varepsilon$$

ove

$$\Delta_\varepsilon < 3\, \mathrm{J}_{3\varepsilon}\, \mathrm{NK} + 4\varepsilon\, \mathrm{N\overline{M}K} + 4\, \mathrm{NK}\varepsilon^2 f'(1-\varepsilon)\,;$$

e poichè per le ipotesi fatte rispetto a $f'(x)$ si ha

$$\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 f'(1-\varepsilon) = 0\,,$$

avremo infine

$$\lim_{n=\infty} \int_c^1 \psi(x)\, dx \int_{-1}^{1} f(\alpha)\, \varphi(\alpha - x\,, x\,, h_n) = \int_c^1 \psi(x)\, f(x)\, dx\,,$$

cioè

$$\int_c^1 \psi(x)\, f(x)\, dx = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(\alpha)\, \mathrm{X}_n(\alpha)\, d\alpha \int_c^1 \mathrm{X}_n(x)\, \psi(x)\, dx\,;$$

c. d. d.

In un'altra Nota mostreremo come, dimostrata la formola (2), anche la teoria delle equazioni integrali ci conduca alla formola di Stokes.

Matematica. — *Un teorema sulle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche autoaggiunte alle derivate parziali del second'ordine.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Matematica. — *Sugli integrali curvilinei.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Meccanica. — *Contributo allo studio delle tensioni elastiche.* Nota I[a] di U. CRUDELI, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.