ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

In conclusione, per quanto riguarda l'identicità o meno della nostra specie con altra di già nota, noi continuiamo a ritenere, anche dopo la pubblicazione dei signori Griffon e Maublanc, che le nostre tre forme, cioè il *Coryneum perniciosum*, il *Fusicoccum perniciosum* e la *Melanconis perniciosa*, si debbono tenere distinte dalla *Melanconis modonia* Tul. e dalle sue forme conidica e picnidica [1].

Meccanica. — *Sulla biforcazione di una vena liquida.* Nota I di U. Cisotti, presentata dal Socio Levi-Civita.

Meccanica. — *Sopra un caso di emisimmetria che si presenta in certe questioni di Idrodinamica.* Nota di G. Colonnetti, presentata dal Socio Levi-Civita.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Contributo allo studio delle tensioni elastiche.* Nota I di Umberto Crudeli, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

1. Sono noti i resultati ottenuti, nel 1906 [2], dal prof. Lauricella sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.

Il metodo del prof. Lauricella per la risoluzione diretta del problema dell'equilibrio elastico, dati gli spostamenti in superficie, s'ispira al procedimento svolto dal sig. Fredholm per risolvere, con nuovo indirizzo, il problema interno del Dirichlet. Si prendono, cioè, le mosse da un sistema di soluzioni fondamentali (singolari) delle equazioni indefinite dell'equilibrio

[1] Le nostre pubblicazioni prese in esame dai sigg. Griffon e Maublanc, sono delle Note preliminari, alle quali deve seguire il lavoro definitivo. La prima parte di questo, ora in corso di stampa, è corredata di nove tavole di già stampate, nelle quali sono figurate: le diverse forme del parassita; le pustole iniziali ed i cancri che esso produce; il percorso che segue l'infezione dai rami al fusto, sino alla radice; le alterazioni anatomo-patologiche dei tessuti attaccati, e sonvi riprodotte le fotografie dello piante nelle quali si veggono i risultati di già ottenuti con la cura da noi consigliata, ecc.

Di queste tavole, noi ci permettiamo mandare in omaggio una copia a codesta eccelsa Accademia.

Un'altra copia abbiamo spedito ai signori Griffon e Maublanc, onde essi possano formarsi un'idea delle ricerche alle quali noi da tempo attendiamo.

[2] Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XV, serie 5ª, 1° sem.; Nuovo Cimento, serie V, tomo 13.

elastico e, analogamente a quanto si fa con l'$\frac{1}{r}$ (dove

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\,)$$

nel caso della $\Delta^2 = 0$, si perviene a trovare sul contorno σ (assoggettato alle note restrizioni) dello spazio finito S, semplicemente connesso, occupato dal corpo, un sistema di equazioni integrali di 2ª specie (tipo Fredholm) dalla cui risoluzione dipende direttamente quella del suddetto problema degli spostamenti. Equazioni integrali, come abbiamo detto, del tipo Fredholm, nelle quali i nuclei divengono, nel punto $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ del contorno σ, infiniti del primo ordine rispetto alla $\frac{1}{r}$. Un procedimento perfettamente analogo viene però a mancare (¹) qualora si voglia risolvere il problema dell'equilibrio elastico quando siano date sulla superficie σ le tensioni, invece degli spostamenti, problema che dovrebbe fare, in certo modo, riscontro, secondo l'idea citata, con quello di costruire una funzione armonica, avente data derivata normale sul contorno. Resulta, quindi, manifesta l'importanza di vedere se possa costruirsi un sistema di tensioni caratteristiche, il quale permetta sulla σ un qualche confronto, diciamo così, suggestivo, fra la componente della tensione secondo una data direzione e la derivata della $\frac{1}{r}$ secondo la direzione stessa. Nel presente lavoro costruisco appunto, nel corpo che occupa il supposto spazio S, un sistema di tensioni caratteristiche, il quale, sulla superficie σ, crea una tensione la cui componente secondo la normale a σ nel punto (x, y, z) [come pure secondo la normale a σ in (ξ, η, ζ)] diventa, sulla σ stessa, per $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, infinita del primo ordine rispetto alla $\frac{1}{r}$ *indipendentemente dal sistema di assi costruttivo* (²). E, perciò, in tal caso, la singolarità desiderata si ha *per quanto riguarda la componente normale della tensione*, analogamente, diciamo così, a quanto avviene per la derivata della $\frac{1}{r}$, derivata che, presa secondo una direzione *generica*, non avrebbe la singolarità in discorso, bensì una singolarità del secondo ordine. Cioè, qualora mi prendessi la libertà di abbreviare l'espressione « componente della tensione secondo una data direzione » col dire « tensione secondo una data direzione », all'espressione

(¹) Circostanze analoghe sono state poste in luce chiaramente in una Memoria del prof. E. E. Levi, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, comparsa fra le Memorie della Società dei XL (1909).

(²) Occorre por mente alla distinzione fra sistema d'assi costruttivo e sistema d'assi rappresentativo. Essi, generalmente, coincidono (come noi pure qui supporremo), ma l'uno serve per la costruzione a priori di tensioni, mentre l'altro serve per rappresentarle.

« derivata secondo una data direzione » verrebbe, nel caso che quì tratterò, a corrispondere, col significato suddetto, l'altra di « tensione secondo una data direzione ».

2. Come già ebbe a notare il Beltrami [1] [e come si deduce subito dalle equazioni indefinite dell'equilibrio elastico

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta^2 s_x + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \;,\quad \Delta^2 s_y + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} \;,\quad \Delta^2 s_z + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \\ \theta = \dfrac{\partial s_x}{\partial x} + \dfrac{\partial s_y}{\partial y} + \dfrac{\partial s_z}{\partial z}\,, \end{cases}$$

dopo avere ricordato il postulato di Hooke, che lega le tensioni caratteristiche alle caratteristiche della deformazione [2]] supposte eliminate le forze di massa (come noi quì sempre supporremo) fra le tensioni caratteristiche sussistono di conseguenza le seguenti relazioni

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha\Delta^2 X_x = 0 \;,\quad \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \alpha\Delta^2 Y_y = 0 \;,\quad \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \alpha\Delta^2 Z_z = 0 \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} + \alpha\Delta^2 X_y = 0 \;,\quad \dfrac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z} + \alpha\Delta^2 Y_z = 0 \;,\quad \dfrac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial x} + \alpha\Delta^2 Z_x = 0 \\ T = X_x + Y_y + Z_z\,, \end{cases}$$

dove

$$\alpha = 1 + \Omega \text{ essendo } \Omega = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \text{ (rapporto di Poisson)}$$

ovvero

$$\alpha = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)} = \frac{3k-1}{2k}\,.$$

(1) Rend. R. Acc. dei Lincei, 1892 (1° sem. pag. 142).

(2) Chiameremo « *caratteristiche della deformazione* » le sei quantità che gli inglesi chiamano « strains » e « *tensioni caratteristiche* » le sei tensioni dette « stress » dagli inglesi. Le prime verranno indicate con a, b, c, f, g, h intendendo

$$a = \frac{\partial s_x}{\partial x}\,,\; b = \frac{\partial s_y}{\partial y}\,,\; c = \frac{\partial s_z}{\partial z}\,.\; f = \frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z}\,,\; g = \frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x}\,,\; h = \frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial y}$$

e le seconde con $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z$ dove $X_y = Y_x, X_z = Z_y, Z_x = X_z$. Talchè, in virtù del postulato di Hooke, sarà

$$X_x = (\lambda + 2\mu)\,a + \lambda b + \lambda c \;,\quad Y_y = \lambda a + (\lambda + 2\mu)\,b + \lambda c \;,\quad Z_z = \lambda a + \lambda b + (\lambda + 2\mu)\,c$$

$$Z_y = Y_z = \mu f \;,\quad Z_x = X_z = \mu g \;,\quad X_y = Y_x = \mu h\,,$$

avendo indicato con λ e μ le due costanti d'isotropia (Tali costanti sono legate alla k dalla relazione $k = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu}$). Si ricava $X_x + Y_y + Z_z = T = (3\lambda + 2\mu)\,\theta$.

E, dati i limiti entro cui trovasi compresa, nella ordinaria teoria della elasticità, la costante k, le relazioni (2) [già considerate come conseguenza dell'equilibrio elastico (¹)] e le seguenti (3)

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = 0 \\ Y_x = X_y \ , \ X_z = Z_x \ , \ Z_y = Y_z \end{cases}$$

possono concepirsi nel loro insieme simultaneo (2) (3) come un sistema di equazioni atte ad individuare le pure deformazioni elastiche (infinitesime) (²).

Supposto trovato un sistema di tensioni caratteristiche, regolari nello spazio S, il postulato di Hooke

$$\begin{cases} X_x = (\lambda + 2\mu)\, a + \lambda b + \lambda c \\ Y_y = \lambda a + (\lambda + 2\mu)\, b + \lambda c \\ Z_z = \lambda a + \lambda b + (\lambda + 2\mu)\, c \\ Y_z = \mu f \ , \ Z_x = \mu g \ , \ X_y = \mu h \end{cases}$$

ci fornirà le corrispondenti caratteristiche della deformazione, essendo il determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{vmatrix} = 4\mu^2(3\lambda + 2\mu)$$

nella ordinaria teoria della elasticità diverso da zero, giacchè, in virtù dei limiti entro cui si pone, nella teoria medesima, il rapporto di Poisson, si ha, come è noto, $\mu > 0$, $k > \frac{1}{3}$, ovvero $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$. E gli spo-

(¹) Rend. R. Acc. dei Lincei, 1905 (1° sem., pag. 129).

(²) È implicitamente inteso che noi qui consideriamo i corpi elastici isotropi ed omogenei.

stamenti potranno, poi, calcolarsi, a meno naturalmente di uno spostamento rigido arbitrario, mediante le note formule del Volterra [1].

Ritengo opportuno porre in luce, incidentalmente (anche per l'interesse che ciò può avere dal punto di vista fisico) come nel sistema di equazioni (2) e (3) si possono mettere in evidenza tre parti *a ciascuna delle quali, presa separatamente, può darsi la forma che ha*, nel caso di forze di massa derivanti da un potenziale, *il sistema delle equazioni del moto lento stazionario dei fluidi viscosi incompressibili.* Infatti, il suddetto sistema (2) (3) può scriversi così:

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\alpha\Delta^2 X_x=0\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\alpha\Delta^2 X_y=0\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\alpha\Delta^2 X_z=0\\
\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\alpha\Delta^2 Y_x=0\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\alpha\Delta^2 Y_y=0\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\alpha\Delta^2 Y_z=0\\
\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\alpha\Delta^2 Z_x=0\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\alpha\Delta^2 Z_y=0\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\alpha\Delta^2 Z_r=0\\
\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0\\
X_y=Y_x\,,\ Y_z=Z_y\,,\ Z_x=X_z\,,\ T=X_x+Y_y+Z_z\,.
\end{array}\right.$$

Da cui l'asserto resulta manifesto.

Ciò posto, vengo a costruire un sistema di integrali (cui più sopra ho alluso) delle equazioni simultanee (2) e (3), integrali che sono regolari nell'interno dello spazio S, mentre sul contorno σ la relativa componente della tensione secondo la normale n (come pure quella secondo la normale ν) diverrà sulla σ stessa, nel punto $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$, infinita del primo ordine rispetto alla $\frac{1}{r}$ [2]. Con ν ho indicato la normale nel punto (ξ,η,ζ) fisso (arbitrario) del contorno σ, mentre n rappresenterà la normale nel punto generico del contorno stesso.

[1] Vedasi una Nota del prof. Almansi (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1907, 1° semestre, pag. 23).

[2] Supposto il contorno σ assoggettato a note restizioni.

Il sistema di integrali in questione è il seguente

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
t_{11} &= (k-1)\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} - (k+1)\, r\, \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \cos \widehat{r\nu} + \frac{\partial^2 \cos \widehat{r\nu}}{\partial x^2} \\
t_{12} &= -(k+1)\, r\, \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y} \cos \widehat{r\nu} + \frac{\partial^2 \cos \widehat{r\nu}}{\partial x\, \partial y} \\
t_{13} &= -(k+1)\, r\, \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z} \cos \widehat{r\nu} + \frac{\partial^2 \cos \widehat{r\nu}}{\partial x\, \partial z} \\
t_{21} &= -(k+1)\, r\, \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos \widehat{r\nu} + \frac{\partial^2 \cos \widehat{r\nu}}{\partial y\, \partial x} \\
t_{22} &= (k-1)\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} - (k+1)\, r\, \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} \cos \widehat{r\nu} + \frac{\partial^2 \cos \widehat{r\nu}}{\partial y^2} \\
t_{23} &= -(k+1)\, r\, \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos \widehat{r\nu} + \frac{\partial^2 \cos \widehat{r\nu}}{\partial y\, \partial z} \\
t_{31} &= -(k+1)\, r\, \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos \widehat{r\nu} + \frac{\partial^2 \cos \widehat{r\nu}}{\partial z\, \partial x} \\
t_{32} &= -(k+1)\, r\, \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial y} \cos \widehat{r\nu} + \frac{\partial^2 \cos \widehat{r\nu}}{\partial z\, \partial y} \\
t_{33} &= (k-1)\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} - (k+1)\, r\, \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \cos \widehat{r\nu} + \frac{\partial^2 \cos \widehat{r\nu}}{\partial z^2}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

La $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ s'intende relativa alla distanza fra il punto generico (x, y, z) dello spazio S, ed il punto (ξ, η, ζ) della superficie σ [1].

Meccanica. — *Contributo allo studio delle tensioni elastiche.* Nota II di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Il seguito ad una prossima Nota.