ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Un teorema sulle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche autoaggiunte alle derivate parziali del secondo-ordine.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nella presente Nota do un teorema per le soluzioni delle equazioni lineari ellittiche, autoaggiunte, alle derivate parziali del second'ordine che è perfettamente l'analogo del classico *teorema di confronto* di Sturm nella teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie del second'ordine. E la dimostrazione consiste appunto in una immediata estensione di quella che io detti del teoremo indicato di Sturm nelle mia Tesi di abilitazione (¹).

Il teorema, che qui dimostro, conduce poi ad una notevole proposizione sugli zeri delle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche autoaggiunte del second'ordine, i cui coefficienti dipendono in un certo modo da un parametro λ, proposizione che, in particolare, stabilisce molto semplicemente una nota proprietà delle linee nodali nelle oscillazioni semplici di una membrana vibrante.

Lo stesso teorema permette altresì, come farò vedere in una Nota che seguirà la presente, di assegnare in modo preciso, per la più generale equazione ellittica autoaggiunta del second'ordine, il limite superiore di lunghezze lineari da cui dipende l'estensione di una regione piana di contorno prestabilito (per esempio, il limite superiore della larghezza di una striscia, della larghezza di una corona circolare, del raggio di un cerchio, ecc.) per la quale sussiste la proprietà che i valori dell'integrale assegnati su un contorno chiuso limitante un campo tutto contenuto in essa valgono a determinare l'integrale.

2. Si abbiano le equazioni ellittiche autoaggiunte del second'ordine:

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\theta_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+t_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{t_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}+ \\ +A_1(x,y)\,u=0,$$

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\theta_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+t_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{t_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}+ \\ +A_2(x,y)\,u=0;$$

per le quali $\theta_1, \theta_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2, \frac{\partial\theta_1}{\partial x}, \frac{\partial\theta_2}{\partial x}, \frac{\partial t_1}{\partial x}, \frac{\partial t_1}{\partial y}, \frac{\partial t_2}{\partial x}, \frac{\partial t_2}{\partial y}, \frac{\partial \tau_1}{\partial y}, \frac{\partial \tau_2}{\partial y}$,

(¹) Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende una equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XI). Le molte altre dimostrazioni che si conoscono del teorema di Sturm non mi pare siano suscettibili di una simile estensione.

A_1, A_2 sono funzioni finite e continue in un campo connesso e finito C di contorno chiuso c.

Avendo supposto le equazioni (1) e (2) ellittiche, risulterà in C

$$\theta_1 \tau_1 > 0 \quad , \quad \theta_2 \tau_2 > 0 \, ;$$

supporremo sempre, per fissare le idee, che in C sia

$$\theta_1 > 0 \, , \tau_1 > 0 \quad , \quad \theta_2 > 0 \, , \tau_2 > 0 \, .$$

Vale allora il seguente *teorema di confronto*:

Se è in C

$$\theta_1 \geq \theta_2 \quad , \quad (\theta_1 - \theta_2)(\tau_1 - \tau_2) - (t_1 - t_2)^2 \geq 0 \, .$$

$$A_2 \geq A_1$$

ed esiste una soluzione u della (1) *identicamente nulla sul contorno c di* C [1], *non potrà esistere una soluzione v della* (2) *per la quale il rapporto*

$$\frac{u}{v}$$

non sia costante in C *e ivi si conservi finito.*

Ammettendo infatti l'esistenza in C dell'indicata soluzione v della (2) per la quale il rapporto $\frac{u}{v}$ si conserva finito, si perverrà ad un assurdo nel modo che segue. Poichè u è nulla su c, si ha la relazione

$$(3) \qquad \iint \left\{ \theta_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2t_1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = \iint A_1 u^2 \, dx\, dy \, ,$$

nella quale, ora come sempre in seguito, intenderemo gli integrali doppî estesi al campo C [2]. Poniamo nella (3), in luogo di $A_1 u^2$, la sua eguale

$$-\frac{u^2}{v}\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\theta_2 \frac{\partial v}{\partial x} + t_2 \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(t_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} - (A_2 - A_1)\, u^2 \, ,$$

[1] Sottintendiamo naturalmente una soluzione non identicamente nulla in C. Avvertiamo che parlando di una soluzione di un'equazione del 2° ordine, supporremo la soluzione finita e continua nel campo C (il contorno incluso) insieme alle sue derivate prime.

[2] Cfr. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II (1905), pag. 23 e seg. Dalla (3) del testo si deduce, com'è noto, poichè la forma quadratica $\theta_1 X^2 + 2t_1 XY + \tau_1 Y^2$ è definita positiva, che se in C è $A(x, y) \leq 0$, una soluzione della (1) nulla su c è identicamente nulla in C, si deduce cioè, nell'ipotesi $A(x, y) \leq 0$, il teorema d'unicità per gl'integrali della (1) che prendono su c valori assegnati. Notiamo che questa conclusione non rientra in quella analoga del Picard a pag. 24 del luogo citato, rientra invece, supposta una più elevata derivabilità nei coefficienti dell'equazione, in un teorema del Paraf (cfr. Picard, loc. cit., pag. 34).

ciò che possiamo fare poichè $\frac{u^2}{v}$ si manterrà, per l'ipotesi fatta, finita e continua in C, il secondo membro della (3) si trasformerà allora nella somma seguente

$$-\iint \frac{u^2}{v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta_2\frac{\partial v}{\partial x}+t_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy-\iint\frac{u^2}{v}\frac{\partial}{\partial y}\left(t_2\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy-$$
$$-\iint(\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_1)\,u^2\,dx\,dy\,.$$

Ora, tenendo presente l'ipotesi fatta su $\frac{u}{v}$ ed osservando che su c sarà $\frac{u^2}{v}=0$, integrando per parti si avrà

$$-\iint\frac{u^2}{v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta_2\frac{\partial v}{\partial x}+t_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=2\iint\left(\theta_2\frac{\partial v}{\partial x}+t_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{u}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy-$$
$$-\iint\left(\theta_2\frac{\partial v}{\partial x}+t_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy\,,$$

$$-\iint\frac{u^2}{v}\frac{\partial}{\partial y}\left(t_2\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=2\iint\left(t_2\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{u}{v}\frac{\partial u}{dy}\,dx\,dy-$$
$$-\iint\left(t_2\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy\,,$$

mentre il primo membro della (3) potrà anche scriversi

$$\iint\left\{(\theta_1-\theta_2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2(t_1-t_2)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+(\tau_1-\tau_2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$
$$+\iint\left\{\theta_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2t_2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy\,.$$

Ne segue quindi dalla (3)

$$\iint\left\{(\theta_1-\theta_2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2(t_1-t_2)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+(\tau_1-\tau_2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$
$$+\iint\left\{\theta_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2t_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\tau_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy+\iint(\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_1)\,u^2\,dx\,dy=0\,,$$

dalla quale ultima relazione, per le ipotesi

$$\theta_1\geq\theta_2\qquad(\theta_1-\theta_2)(\tau_1-\tau_2)-(t_1-t_2)^2\geq 0\,,$$
$$\theta_2>0\quad,\quad\theta_3\tau_2\quad t_2^2>0\,,$$
$$\mathrm{A}_2\geq\mathrm{A}_1\,,$$

si deduce necessariamente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0\,,$$

cioè che il rapporto $\frac{u}{v}$ è costante in C. Questa conclusione, poichè in C non è identicamente $u = 0$, è contraria ad una delle ipotesi [1].

Osservando che l'equazione (2) può anche coincidere colla (1), possiamo dunque dire: Se esiste in C una soluzione u della (1) nulla su c, non può esistere una soluzione v della stessa (1) o della (2) che non si annulli mai in C (il contorno incluso), o che si annulli in modo che il rapporto $\frac{u}{v}$ si conservi finito in tutto C (il contorno incluso), a meno che u e v non dipendano linearmente.

Rileviamo che si ha in particolare:

In un campo C *in cui esiste una soluzione della* (1) *nulla sul contorno, ogni solusiona della stessa* (1) *o della* (2) *non può sempre conservarsi diversa da zero.*

Questa conseguenza, per quanto concerue la sola equazione (1), è ben nota.

3. Si abbia ora l'equazione

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left\{\theta(x\,,y\,;\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + t(x\,,y\,;\lambda)\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + \\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left\{t(x\,,y\,;\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + \tau(x\,,y\,;\lambda)\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + A(x\,,y\,;\lambda)\,u = 0\,, \end{aligned}$$

i cui coefficienti dipendono dal parametro λ in modo che essa sia ellittica per qualunque valore di λ. Si può facilmente dimostrare il teorema:

Se le funzioni $\theta(x\,,y\,;\lambda)$, $\tau(x\,,y\,;\lambda)$, $t(x\,,y\,;\lambda)$, $A(x\,,y\,;\lambda)$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\tau}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$, *sono in* C, *per ogni valore di* λ, *finite e continue e soddisfano alle limitazioni*

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &P(\lambda) \geq \theta(x\,,y\,;\lambda) \geq p(\lambda) > 0 \quad , \quad P(\lambda) \geq \tau(x\,,y\,;\lambda) \geq p(\lambda) > 0\,, \\ &\{P(\lambda) - \theta(x\,,y\,;\lambda)\}\,.\,\{P(\lambda) - \tau(x\,,y\,;\lambda)\} - t^2(x\,,y\,;\lambda) \geq 0\,, \\ &M(\lambda) \geq A(x\,,y\,;\lambda) \geq m(\lambda) > 0\,, \end{aligned}\right.$$

[1] Osservando la dimostrazione del teorema può sembrare a prima vista che si possa fare a meno della condizione per la (1) d'essere ellittica, ma si vede facilmente che dalle diseguaglianze $\theta_1 \geq \theta_2\,, \theta_2 > 0\,, (\theta_1 - \theta_2)(\tau_1 - \tau_2) - (t_1 - t_2)^2 \geq 0\,, \theta_2\tau_2 - t_2^2 > 0$, segue $\theta_1 > 0\,, \theta_1\tau_1 - t_1^2 > 0$.

mentre si ha

$$\lim_{\lambda=\infty} \mathrm{P}(\lambda) = \textit{quantità finita o nulla} \quad , \quad \lim_{\lambda=\infty} m(\lambda) = \infty\,, \tag{6}$$

assegnato un segmento di lunghezza σ arbitrariamente piccola, esiste sempre un valore λ_σ di λ tale che per

$$\lambda \geq \lambda_\sigma$$

ogni soluzione della (4) si annulla in una qualunque porzione di C *limitata da un cerchio di raggio σ.*

Confrontiamo infatti l'equazione (4) con l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \mathrm{P}(\lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{ \mathrm{P}(\lambda) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + m(\lambda)\, u = 0\,, \tag{7$_1$}$$

che può anche scriversi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{m(\lambda)}{\mathrm{P}(\lambda)}\, u = 0\,,$$

od anche, ponendo

$$\frac{m(\lambda)}{\mathrm{P}(\lambda)} = 2\Lambda^2(\lambda)\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\Lambda^2(\lambda)\, u = 0\,. \tag{7$_2$}$$

La funzione

$$v = \operatorname{sen} \Lambda(\lambda)\, x \operatorname{sen} \Lambda(\lambda)\, y$$

è una soluzione della (7), questa soluzione è nulla sul contorno di ogni quadrato Q^λ_{hk} formato dalle parallele agli assi coordinati

$$x = h\frac{\pi}{\Lambda(\lambda)} \quad , \quad x = (h+1)\frac{\pi}{\Lambda(\lambda)}\,,$$

$$y = k\frac{\pi}{\Lambda(\lambda)} \quad , \quad y = (k+1)\frac{\pi}{\Lambda(\lambda)}\,,$$

h e k significando due arbitrarii numeri intieri. Ne segue intanto, dalle diseguaglianze (5), in forza del teorema del n. 2, che per ogni valore di λ, ogni soluzione della (4) si annulla in un qualunque quadrato Q^λ_{hk} che sia contenuto nel campo C.

Ma per la (6) si ha

$$\lim_{\lambda=\infty} \Lambda(\lambda) = \infty\,,$$

esisterà pertanto, comunque piccolo sia σ, un tal valore λ_σ di λ che per $\lambda \geq \lambda_\sigma$ si abbia

$$\frac{\pi}{\varDelta(\lambda)} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2}} .$$

Ora per gli indicati valori di λ non inferiori a λ_σ, in un qualunque cerchio di raggio σ è contenuto almeno un quadrato Q_{hk}^{λ}, per cui in una qualunque porzione di C limitata da un cerchio di raggio σ, pei detti valori di λ non inferiori a λ_σ, vi si annulla ogni soluzione della (4), c. v. d.

5. Ne concludiamo che se $u(x, y; \lambda)$ è una qualunque soluzione della (4), i punti le cui coordinate x e y soddisfano l'equazione

$$u(x, y; \lambda) = 0 ,$$

invadono *in modo uniforme*, per λ crescente all'infinito, una qualunque porzione di C, comunque piccola e dovunque situata.

Alle ipotesi del teorema, testè dimostrato, soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau \frac{\partial u}{\partial y}\right) + (\lambda \mathrm{A} + \mathrm{B})\, u = 0 ,$$

per la quale θ e τ non dipendono da λ e con $\mathrm{A}(x, y)$ si conservano in C maggiori di una quantità positiva. Consideriamo la (4) nel caso ancora più particolare

$$\theta(x, y; \lambda) \equiv \tau(x, y; \lambda) \equiv 1 \;,\; t(x, y; \lambda) \equiv 0 \;,\; \mathrm{A}(x, y; \lambda) \equiv \lambda^2 ,$$

consideriamo cioè *l'equazione delle membrane vibranti*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u = 0 . \tag{8}$$

È noto che per classi particolari di contorni c di C è stata dimostrata l'esistenza di infiniti valori positivi di λ^2 (*i valori eccezionali di* λ^2)

$$\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \cdots$$

aventi il punto infinito per unico punto limite, per ciascuno dei quali esistono soluzioni della (8) nulle su c e non identicamente nulle in C [1].

Considerando contorni c della specie indicata, designamo con $u(x, y; \lambda_k)$ una soluzione della (8), corrispondente al valore eccezionale λ_k^2, nulla su c, i punti di C (interni) in cui si annulla $u(x, y; \lambda_k)$ si distribuiscono in

[1] Cfr., per esempio, Poincaré, *Sur les équations de la Physique Mathématique* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1894)]; Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Zweite Mitteilung) [Göttinger Nachrichten (1904)].

linee (¹) costituenti le linee nodali in una oscillazione semplice di una membrana vibrante avente c per contorno fisso. Per cui il teorema del numero precedente, riflettendo che $\lim_{k=\infty} \lambda_k = \infty$, dà in particolare:

Le linee nodali in una oscillazione semplice di una membrana vibrante avente un qualunque contorno piano fisso della specie indicata, invadono in modo uniforme, nell'elevarsi indefinito del tono, una qualunque porzione (comunque piccola e dovunque situata) della regione del piano limitata dal contorno (²).

Matematica. — *Sul problema di Dirichlet per la più generale equazione lineare ellittica autoaggiunta alle derivate parziali del second'ordine.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide.* Nota II di A. SIGNORINI, presentata dal Socio P. PIZZETTI.

In questa Nota completiamo i risultati della Nota dello stesso titolo già pubblicata in questi Rendiconti nel senso indicato in fine della Nota stessa.

Supposto il Geoide poco differente da una sfera S_1 di raggio a, indichiamo con S una superficie pure poco differente da S_1 tale che siano noti i valori g che la gravità assumerebbe nei singoli suoi punti se il Geoide coincidesse con essa, la massa totale terrestre M e la velocità angolare terrestre ω restando inalterate.

Dette inoltre

$$r\,,\,\theta\,,\,v$$

(¹) Cfr. per esempio, Riemann-Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik,* zweiter Band (1901), pag. 282 (teorema IV del § 114).

(²) Alla stessa proprietà, certamente con mezzi assai meno semplici, si perviene, come sarà stato osservato, valendosi del teorema della media per l'equazione (8), espresso dalla formola

$$u_0\,\mathrm{J}(\lambda r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\,,\vartheta)\,d\vartheta,$$

dove $\mathrm{J}(x)$ designa la funzione di Bessel d'ordine zero e u_0 il valore di una soluzione u della (8) nel centro di un cerchio di raggio r tutto interno a C. Cfr. Riemann-Weber, loc. cit. (teorema VI del § 114).