ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

linee [1] costituenti le linee nodali in una oscillazione semplice di una membrana vibrante avente c per contorno fisso. Per cui il teorema del numero precedente, riflettendo che $\lim_{k=\infty} \lambda_k = \infty$, dà in particolare:

Le linee nodali in una oscillazione semplice di una membrana vibrante avente un qualunque contorno piano fisso della specie indicata, invadono in modo uniforme, nell'elevarsi indefinito del tono, una qualunque porzione (comunque piccola e dovunque situata) della regione del piano limitata dal contorno [2].

Matematica. — *Sul problema di Dirichlet per la più generale equazione lineare ellittica autoaggiunta alle derivate parziali del second'ordine.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide.* Nota II di A. SIGNORINI, presentata dal Socio P. PIZZETTI.

In questa Nota completiamo i risultati della Nota dello stesso titolo già pubblicata in questi Rendiconti nel senso indicato in fine della Nota stessa.

Supposto il Geoide poco differente da una sfera S_1 di raggio a, indichiamo con S una superficie pure poco differente da S_1 tale che siano noti i valori g che la gravità assumerebbe nei singoli suoi punti se il Geoide coincidesse con essa, la massa totale terrestre M e la velocità angolare terrestre ω restando inalterate.

Dette inoltre

$$r, \theta, v$$

[1] Cfr. per esempio, Riemann-Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik,* zweiter Band (1901), pag. 282 (teorema IV del § 114).

[2] Alla stessa proprietà, certamente con mezzi assai meno semplici, si perviene, come sarà stato osservato, valendosi del teorema della media per l'equazione (8), espresso dalla formola

$$u_0 \mathrm{J}(\lambda r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \vartheta)\, d\vartheta,$$

dove $\mathrm{J}(x)$ designa la funzione di Bessel d'ordine zero e u_0 il valore di una soluzione u della (8) nel centro di un cerchio di raggio r tutto interno a C. Cfr. Riemann-Weber, loc. cit. (teorema VI del § 114).

le coordinate polari geocentriche di un punto qualunque dello spazio. diciamo $\Delta g_{\theta,v}$ l'anomalia che la gravità osservata in un punto (θ, v) del Geoide presenta rispetto al valore teorico g corrispondente al punto (θ, v) di S.

Sia poi, conformemente alle ipotesi fatte,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - \alpha t)$$

— ove α è una costante così piccola che nei nostri calcoli potremo sempre trascurare i termini che contengano a fattore il suo quadrato o il suo prodotto per ω^2, e t è una conveniente funzione di θ, v — l'equazione di G in coordinate polari geocentriche.

Avremo allora

$$(1) \qquad \int_{4\pi} \Delta G_{\theta' v'} P_1(\theta, v ; \theta', v')\, d\Omega' = 0 ;$$

e l'equazione del Geoide sarà data da

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - \alpha t - \alpha \Delta t),$$

ove Δt è una funzione di θ, v legata alle funzione ΔG dalla equazione integrale

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Delta t_{\theta, v} = {} & \frac{a^2}{2\pi f M \alpha} \int_{4\pi} \sum_0^\infty {}_n P_n(\theta v ; \theta' v')\, \Delta G_{\theta' v'}\, d\Omega' - \\ & - \frac{5}{8\pi} \frac{a^2}{\alpha f M} \int_{4\pi} \Delta G_{\theta' v'}\, d\Omega' + \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \sum_2^\infty {}_n P_n(\theta v ; \theta' v')\, \Delta t_{\theta' v'}\, d\Omega', \end{aligned}$$

f essendo la costante dell'attrazione, e avendo posto, secondo il solito,

$$d\Omega' = \text{sen}\, \theta'\, d\theta'\, d\varphi' \quad (^1).$$

Il nucleo di questa equazione diviene evidentemente infinito per $\theta = \theta'$, $v = v'$. Volendo dunque risolverla, seguendo un procedimento dovuto a Fredholm, sarà in primo luogo da esaminare se qualcuno dei successivi nuclei iterati risulta finito e continuo per tutti i valori di θ, θ', v, v'.

In base ai risultati della Nota I, si trova subito

$$K_2(\theta, v ; \theta', v') = \frac{3}{4\pi} \sum_2^\infty {}_n \frac{3}{2n+1} P_n(\theta, v ; \theta', v')$$

ed anche — poichè il teorema ivi dimostrato, applicato, come è lecito, alla

(1) Cfr. Pizzetti, *Intorno alla determinazione teorica della gravità alla superficie terrestre*. Atti d. R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI.

funzione

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{X_n(x)}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\xi'^4 - 2\xi'^2 x}}\, d\xi' ,$$

ci dà

$$\int_c^1 \sum_0^\infty \frac{X_n(x)}{2n+1}\, \psi(x)\, dx = \sum_0^\infty \frac{1}{2n+1} \int_c^1 X_n(x)\, \psi(x)\, dx \, —$$

$$K_3(\theta v\,;\theta' v') = \frac{3}{4\pi} \sum_2^\infty \frac{3^2}{(2n+1)^2}\, P(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v') .$$

Il 3° nucleo iterato è dunque sempre finito e continuo; e quindi, posto

$$E(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v') = - K(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v') - K_2(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v') =$$

(3) $$= - \frac{3}{4\pi} \sum_2^\infty \frac{2n+4}{2n+1}\, P_n(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v')$$

(4) $$g(\theta v) = \frac{a^2}{2\pi f M \alpha} \int_{4\pi} \sum_0^\infty P_n(\theta v\,;\,\theta' v')\, \Delta G_{\theta' v'}\, d\Omega' - \frac{5}{8\pi} \frac{a^2}{\alpha f M} \int_{4\pi} \Delta G_{\theta' v'}\, d\Omega'$$

$$\overline{K}(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v') = K_3(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v') ,$$

se l'equazione integrale

(5) $$\Delta t_{\theta,v} = g(\theta\,, v) - \int_{4\pi} g(\theta'\,, v')\, E(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v')\, d\Omega' + \\ + \int_{4\pi} \overline{K}(\theta v\,;\,\theta' v')\, \Delta t_{\theta' v'}\, d\Omega'$$

avrà una ed una sola soluzione, anche l'equazione integrale (2) avrà una ed una sola soluzione che coinciderà con essa.

Ora, la serie dei nuclei iterati dell'equazione integrale (5)

$$\sum_i^\infty \overline{K}_i = \frac{3}{4\pi} \sum_1^\infty{}_i \sum_2^\infty{}_n \frac{3^{3i-1}}{(2n+1)^{3i-1}}\, P_n(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v') = \\ = \frac{3^3}{8\pi} \sum_2^\infty \frac{2n+1}{n-1} \frac{1}{4n^2+10n+13}\, P_n(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v')$$

converge uniformemente per ogni valore di $\theta\,, \theta'\,, v\,, v'$. Quindi l'equazione integrale (4) avrà un nucleo risolvente

(6) $$\overline{\Gamma}(\theta v\,;\,\theta' v') = \frac{3^3}{8\pi} \sum_2^\infty \frac{2n+1}{n-1} \frac{1}{4n^2+10n+13}\, P_n(\theta v\,, \theta' v') ,$$

e quindi anche l'equazione integrale (2) avrà una ed una sola soluzione, data da

(7) $$\Delta t_{\theta v} = g(\theta v) - \int_{4\pi} E(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v')\, g(\theta'\,, v')\, d\Omega' + \\ + \int_{4\pi} \overline{\Gamma}(\theta\,, v\,;\,\theta'\,, v') \left\{ g(\theta'\,, v') - \int_{4\pi} E(\theta'\,, v'\,;\,\theta''\,, v'')\, g(\theta''\,, v'')\, d\Omega'' \right\} d\Omega' .$$

Poniamo,

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(v - v')$$

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\,P_n(\cos\gamma) = \Phi(\cos\gamma) = \operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2} + 1 - 5\cos\gamma - 6\sin\frac{\gamma}{2} +$$
$$+ 3\cos\gamma\log\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Se, dopo ciò, nella (7), a $g(\theta v)$, $E(\theta, v; \theta', v')$, $\overline{\Gamma}(\theta v; \theta' v')$ sostituiamo i loro valori effettivi (4) (3) (6) ed integriamo termine a termine le serie che vengono allora a comparire sotto il segno integrale nel secondo membro della formola stessa — ciò che, per i risultati della Nota I, è perfettamente giustificato — tenendo presente la (1), si trova facilmente

$$\Delta t_{\theta,v} = -\frac{a^2}{8\pi f M\alpha}\int_{4\pi}\Delta G_{\theta' v'}\,d\Omega' + \frac{a^2}{4\pi f M\alpha}\int_{4\pi}\Delta G_{\theta' v'}\,\Phi(\gamma)\,d\Omega'.$$

Questa è appunto la formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide.

Matematica. — *Sul criterio di Stéphanos*. Nota di A. Signorini, presentata dal Socio L. Bianchi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Variazioni periodiche di resistenza dei filamenti metallici sottili resi incandescenti con correnti alternate e deduzione delle loro proprietà termiche a temperatura elevata*. Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

In un circuito percorso da correnti alternate, la presenza di un conduttore avente una resistenza variabile con la intensità della corrente si traduce in una variazione della legge con cui questa si svolge nel tempo. La corrente non avrà più, in conseguenza, la forma sinusoidale, anche quando sia questa la legge di variazione della forza elettromotrice: e questo cambiamento di forma si tradurrà, in generale, nella sovrapposizione di alquanti armonici all'onda fondamentale, che resterà fortemente predominante se le oscillazioni di resistenza son lievi.

Il metodo oscillografico si presta poco in questo ultimo caso; poichè lievi modificazioni della forma della corrente possono restare dissimulate, ed essere difficilmente separabili gli armonici introdotti. Mi è stato invece