

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Poniamo,

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (v - v') \\ \sum_{\frac{\infty}{2}} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \gamma) &= \Phi(\cos \gamma) = \operatorname{cosec} \frac{\gamma}{2} + 1 - 5 \cos \gamma - 6 \sin \frac{\gamma}{2} + \\ &+ 3 \cos \gamma \log \left(\sin \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

Se, dopo ciò, nella (7), a $g(\theta v)$, $E(\theta, v; \theta', v')$, $\bar{\Gamma}(\theta v; \theta' v')$ sostituiamo i loro valori effettivi (4) (3) (6) ed integriamo termine a termine le serie che vengono allora a comparire sotto il segno integrale nel secondo membro della formola stessa — ciò che, per i risultati della Nota I, è perfettamente giustificato — tenendo presente la (1), si trova facilmente

$$\Delta t_{\theta, v} = - \frac{a^2}{8\pi f M \alpha} \int_{4\pi} \Delta G_{\theta' v'} d\Omega' + \frac{a^2}{4\pi f M \alpha} \int_{4\pi} \Delta G_{\theta' v'} \Phi(\gamma) d\Omega'.$$

Questa è appunto la formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide.

Matematica. — *Sul criterio di Stéphanos.* Nota di A. SIGNORINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Variazioni periodiche di resistenza dei filamenti metallici sottili resi incandescenti con correnti alternate e deduzione delle loro proprietà termiche a temperatura elevata.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

In un circuito percorso da correnti alternate, la presenza di un conduttore avente una resistenza variabile con la intensità della corrente si traduce in una variazione della legge con cui questa si svolge nel tempo. La corrente non avrà più, in conseguenza, la forma sinusoidale, anche quando sia questa la legge di variazione della forza elettromotrice: e questo cambiamento di forma si tradurrà, in generale, nella sovrapposizione di alcuni armonici all'onda fondamentale, che resterà fortemente predominante se le oscillazioni di resistenza son lievi.

Il metodo oscillografico si presta poco in questo ultimo caso; poichè lievi modificazioni della forma della corrente possono restare dissimulate, ed essere difficilmente separabili gli armonici introdotti. Mi è stato invece

molto utile l'impiego del tubo di Braun, adoperato con una specie di bobina differenziale, nel modo che passo a descrivere.

Sul tubo agiscono, normalmente tra loro, una piccola bobina A e una molto grande bobina B, costituita da due avvolgimenti distinti assolutamente identici; a tal fine l'avvolgimento è eseguito con due fili paralleli anzichè con uno solo. Per uno dei due avvolgimenti passa una corrente sinusoidale derivata sulla linea attraverso a una resistenza ohmica; per l'altro la corrente che ha circolato nella resistenza variabile. La prima corrente traversa anche la bobinetta A, di cui sopra, mentre con una self ausiliaria inserita nell'altro circuito si rendono eguali le costanti di tempo dei due circuiti.

La grande bobina B è così percorsa contemporaneamente dalla corrente normale e dalla corrente da studiare: gli attacchi son fatti in modo che gli spostamenti subiti dal cerchietto luminoso per effetto delle due correnti siano di senso opposto: cosicchè quando queste sono comunque variabili, ma *assolutamente identiche* tra loro, il puntino resta in quiete nella sua posizione normale. In tali condizioni, l'azione di una sola delle due correnti è fortissima sul tubo: tale che il puntino sfugge totalmente, nel massimo di corrente, dal disco fluorescente e cade sulla parete di vetro.

Chiamiamo

$$i = A \text{ sen } \omega t$$

la corrente normale nel 1° circuito; sia la corrente nel 2° circuito

$$i' = A_1 \text{ sen } \omega t + B_1 \text{ cos } \omega t + A_2 \text{ sen } \omega t + B_2 \text{ cos } 2 \omega t + \dots$$

nella quale, se la corrente è poco perturbata, tutti i coefficienti da B_1 in poi sono piccoli rispetto ad A_1 .

Lo spostamento verticale del puntino sarà dato, per la contemporanea esistenza delle due, da

$$y = (A_1 - A) \text{ sen } \omega t + B_1 \text{ cos } \omega t + A_2 \text{ sen } 2 \omega t + B_3 \text{ cos } 2 \omega t + \dots$$

mentre lo spostamento orizzontale sarà dato da

$$x = K \text{ sen } \omega t$$

ove K è una costante.

Si disegneranno quindi sul disco delle curve più o meno complicate, che potranno facilmente essere fotografate e in alcuni casi si presteranno a una semplice interpretazione. Il successo pratico del metodo si deve a ciò che facendo $A_1 = A$, compensando cioè la componente più forte di i' , lo spostamento y rivela tutte le perturbazioni più lievi nella forma della corrente che traversa la resistenza variabile.

2. Per dimostrare il partito che può trarsi dalla semplice disposizione descritta, riferirò, per adesso, i risultati ottenuti quando la resistenza variabile è costituita da alquante lampade a filamento metallico. Essi mi han consentito di verificare alcune delle conclusioni cui ero pervenuto in un mio lavoro anteriore sulle oscillazioni termiche dei filamenti sottili percorsi da correnti alternate (1).

Ebbi allora a dimostrare che detta W la potenza media spesa nel filo, emessa secondo una funzione $f(T)$ indeterminata della temperatura assoluta T ; c la sua capacità calorifica nei limiti tra cui oscilla la temperatura, misurata in unità moccamiche; e a il coefficiente di variazione termica della resistenza r nei medesimi limiti; ϑ la temperatura del filo contata dalla sua temperatura media T_m ; e ponendo

$$Q = af(T_m) + f'(T_m) = aW + \left(\frac{dW}{dt}\right)_{T_m} = a \left[W + r_m \frac{dW}{dr} \right]$$

le oscillazioni della temperatura si compiono sinusoidalmente e in modo tale che essendo la f. e. m. $e_0 \sin \omega t$, si ha

$$(1) \quad \vartheta = \Theta \cos(2\omega t - \varphi)$$

con

$$(2) \quad \Theta = -W \frac{\cos \varphi}{Q} = -W \frac{\sin \varphi}{2c\omega}$$

e

$$(3) \quad \text{tang } \varphi = \frac{2c\omega}{Q}$$

Il ritardo φ delle oscillazioni di ϑ è così computato sulle variazioni periodiche della potenza istantanea w , data da

$$w = W(1 - \cos 2\omega t)$$

La resistenza istantanea r sarà legata alla resistenza media r_m dalla relazione

$$(4) \quad r = r_m(1 + a\vartheta)$$

Le formole ci permettono perciò di prevedere l'alterazione prodotta dal filamento nella forma della corrente.

Infatti, l'intensità sarà data da

$$i = \frac{e_0 \sin \omega t}{r_m(1 + a\vartheta)}$$

(1) Corbino, Rend. Lincei, XIX, 1° sem., pag. 133 (1910).

ovvero per la piccolezza di $a\vartheta$ rispetto a 1, da

$$i = \frac{e_0 \operatorname{sen} \omega t}{r_m} \left[1 - a\Theta \cos(2\omega t - \varphi) \right]$$

da questa si deduce

$$i = \frac{e_0}{r_m} \left[\left(1 + \frac{a\Theta}{2} \cos \varphi \right) \operatorname{sen} \omega t - \frac{a\Theta}{2} \operatorname{sen} \varphi \cos \omega t - \frac{a\Theta}{2} \operatorname{sen}(3\omega t - \varphi) \right]$$

Abbiamo così una componente in $\operatorname{sen} \omega t$, e due componenti in $\cos \omega t$ e in $\operatorname{sen}(3\omega t - \varphi)$ d'ampiezza molto più piccola.

Questa corrente traversa, come si è detto, uno degli avvolgimenti della grande bobina differenziale, mentre per l'altro si manda una corrente indipendente in $\operatorname{sen} \omega t$, di intensità regolabile. Si può far in modo da annullare l'azione sul cerchietto della componente in $\operatorname{sen} \omega t$; resteranno così attive solo le altre due componenti, oltre allo spostamento orizzontale in $\operatorname{sen} \omega t$ prodotto dalla piccola bobina. Occorre perciò che la corrente compensatrice si possa regolare con squisita graduabilità.

Nelle mie esperienze la f. e. m. di città, di circa 105 Volt e 42 periodi, alimentava 12 lampade Osram da 16 o da 32 candele; la grande bobina differenziale era di tali dimensioni da produrre con un solo dei circuiti contrapposti (resistenza $\frac{2}{3}$ di ohm, autoinduzione circa 4 millihenry) lo spostamento di 12 mm. nel disco di Braun per una corrente continua di 150 milliamperes, cosicchè alla corrente massima, che percorre un solo dei circuiti, corrisponderebbe una deviazione grandissima, superiore a 400 mm.

Malgrado ciò, se in luogo delle lampade a filo metallico si ricorre ad una resistenza invariabile, il compenso è assoluto, e la figura tracciata dal cerchietto si riduce ad una retta orizzontale, come se agisse sul tubo solo la bobinetta A. Con le lampade si ebbero invece dei risultati corrispondenti perfettamente alla teoria.

Aumentando progressivamente la corrente compensatrice, fino ad annullare nello spostamento verticale y la componente in $\operatorname{sen} \omega t$, il che si riconosce dal fatto che i massimi di y si portano a eguale altezza nelle due metà destra e sinistra della curva, questa presenta la forma della fig. (1). L'origine degli assi deve sempre essere un punto doppio della curva, se le costanti di tempo dei due circuiti sono eguali: poichè qualunque sia la legge di variazione di r col tempo, la corrente deve annullarsi contemporaneamente nei due circuiti, due volte a ogni periodo; si ha in ciò un criterio squisito per eguagliare le costanti di tempo medesime. Aggiungendo adesso la compensazione progressiva del termine in $\cos \omega t$ (con una terza bobinetta opportunamente alimentata), l'escursione nel senso y , che era già minima rispetto alle condizioni precedenti, diminuiva ancora; e poichè restavano in tal caso (quando il compenso era sufficiente) solo la componente in $\operatorname{sen}(3\omega t - \varphi)$

nel senso verticale, e lo spostamento orizzontale in $\sin \omega t$, doveva ottenersi la nota curva di Lissajous per la composizione ortogonale di una oscillazione col suo terzo armonico. Il segno dell'esatto compenso è dato da ciò che i sei massimi di y si portano, tre a tre, su due rette parallele all'asse x . La fig. 2, corrispondente a questo caso, conferma la previsione; e dalla forma avuta si deduce ancora che φ è molto prossimo a 90° .

Questo fa sì che l'ampiezza della componente di y in $\cos \omega t$, la quale per la (5) è data da $\frac{a\Theta}{2} \sin \varphi \frac{e_0}{r_m}$, è molto vicina, praticamente eguale, a

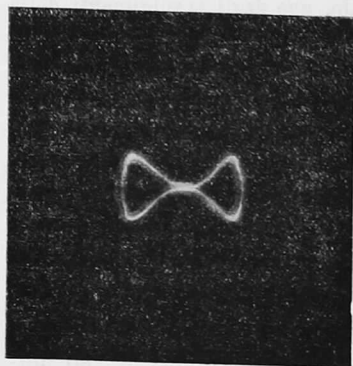


FIG. 1.

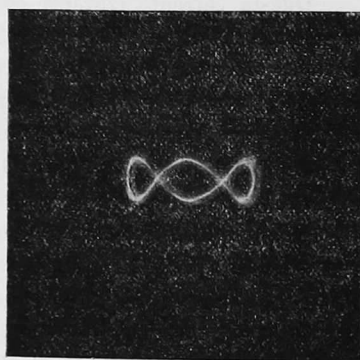


FIG. 2.

quella in $\sin (3\omega t - \varphi)$, e ciò spiega perchè senza compensare quella componente si abbia la curva a 8 della fig. 1, che somiglia alla curva di composizione ortogonale d'una oscillazione con la ottava, mentre è in realtà la composizione del fondamentale in $\sin \omega t$ con due oscillazioni, d'ampiezza quasi eguale, in $\cos \omega t$ e $\sin (3\omega t - \varphi)$, essendo φ prossimo a 90° .

Figure analoghe alle precedenti furono ottenute con lampadine da 32 candele

Ottenuto, con le due correnti compensatrici, l'isolamento del 3° armonico nello spostamento y , come all'incirca nella fig. 2, si può avere la misura di $a\Theta$. Basta a tal fine computare sullo schermo l'ampiezza di questo terzo armonico⁽¹⁾, traducendola in milliampere per confronto con lo spostamento prodotto da una corrente continua di intensità nota traversante uno degli avvolgimenti della bobina differenziale, e valutare la intensità efficace della corrente, e quindi la corrente massima che fornisce il valore di $\frac{e_0}{r_m}$.

(1) Le fotografie riprodotte sono prese attraverso alla parete cilindrica del tubo, dalla parte anteriore del disco fluorescente. Con l'artificio di far agire sul tubo, longitudinalmente, un solenoide percorso da corrente continua, la macchietta circolare si riduce

Si ebbe in tal modo (tensione ai poli 103 Volt):

$$\begin{aligned} a\Theta &= 0,0143 \pm 0,0006 \text{ per le lampade da 32 candele.} \\ a\Theta' &= 0,0207 \pm 0,0005 \text{ " " " " 16 " } \end{aligned}$$

Questi numeri rappresentano, per la (4), la misura della variazione massima di resistenza elettrica del filamento nelle varie fasi della corrente alimentatrice; quella variazione si compie con un ritardo prossimo a 90° sulle oscillazioni della potenza assorbita dal filo.

Cosicchè accettando il valore di a determinato dall'Ebeling coi filamenti metallici delle lampade di questo tipo (¹), cioè $\frac{1}{1500}$, si dovrebbe concludere che le oscillazioni di temperatura hanno l'ampiezza di circa 10° per quelle da 32 candele, e di circa 15° per quelle da 16. Si tratta cioè di oscillazioni molto lievi di temperatura, e non di 250° come per le medesime lampade l'Ebeling credè di trovare col metodo oscillografico.

Molto più difficile riesce una valutazione esatta di $\cos \varphi$, per la vicinanza di φ a 90° ; in questa regione un piccolo errore nella valutazione di φ apporta invero un grande errore relativo nella misura di $\cos \varphi$, e perciò la utilizzazione della prima delle (2) è poco consigliabile (²).

L'errore ha invece poca influenza sul valore di $\sin \varphi$, che può porsi eguale a 1 entro i limiti di approssimazione raggiunti in queste ricerche.

Possiamo perciò utilizzare la seconda delle (2), ponendo in essa $\sin \varphi = 1$; si ottiene allora

$$\frac{c}{a} = \frac{W}{2\omega a\Theta}$$

a un punto brillantissimo circondato da un'aureola nettamente staccata dal punto; e perciò la curva presenta un filetto interno sottilissimo che permette puntate molto esatte sulla parete posteriore del disco millimetrato.

(¹) Ebeling, Ann. d. Physik; 27, pag. 391 (1908).

(²) Si aggiunga che mentre per il primo armonico l'induttanza notevole (4 milli henry) di ciascuno degli avvolgimenti della grande bobina è *come non esistente*, poichè i due circuiti sono perfettamente allacciati e percorsi da correnti eguali, cosicchè la mutua induzione distrugge l'autoinduzione di ciascuno; lo stesso non può dirsi del 3° armonico che circola nell'uno, e che induce nel secondo una corrente la quale ne è solo una frazione e si compone vettorialmente con essa. Di questa corrente indotta che circola nel circuito compensatore occorrerebbe tener conto per correggere il valore dello spostamento sopra calcolato, poichè anche essa agisce, componendosi con la corrente inducente, sul cerchietto del tubo Braun; la correzione è di circa il $\frac{1}{2}$ per cento ed è perciò trascurabile. Ma l'errore apportato da questa causa sul valore misurato di $\cos \varphi$ può essere sensibile.

E perciò, per le lampade da 32 candele, essendo $\omega = 2\pi \times 42$ e
 $W = 103 \text{ Volt} \times \frac{3,9}{12} \text{ Ampère}$, sarà

$$\frac{c}{a} = 4,4$$

e per quelle da 16 ($W = 103 \text{ Volt} \times \frac{2,4}{12} \text{ Amp.}$)

$$\frac{c'}{a'} = 1,9$$

Le esperienze descritte ⁽¹⁾ permettono adunque di dedurre il rapporto $\frac{c}{a}$ tra la capacità calorifica e il coefficiente di temperatura del filamento alla temperatura di regime; entrambi gli elementi sono inaccessibili alla esperienza diretta. Per passare dalle capacità calorifiche c ai calori specifici k espressi in piccole calorie, basta conoscere la massa M dei filamenti, che si determinò pesandoli dopo una delicata rottura del bulbo. Si ottenne così per quello da 32 candele $M = \text{gr. } 0,0097$, e per quello da 16 candele $M = 0,0044$; perciò

$$\frac{k}{a} = 108 \qquad \frac{k'}{a'} = 103$$

La conoscenza del valore di a permetterebbe perciò di dedurre il valore del calore specifico k alla elevata temperatura di regime; così adottando per a il valore $\frac{1}{1500}$ deducibile dalle misure di Ebeling, si trova

$$k = 0,072.$$

Ma è certo più prudente prendere come variabile indipendente la resistenza specifica anzichè la temperatura; quel rapporto misura invero la quantità di calore assorbita da 1 grammo del filo nel riscaldarsi, divisa per la conseguente variazione unitaria della resistenza. E perciò, il risultato ottenuto ci dice che *per riscaldare il filamento, alla temperatura di regime, di tanto che la sua resistenza si alteri di un millesimo, occorre un decimo di piccola caloria per ogni grammo della sua massa.*

Oltre alla conferma della teoria sopra ricordata, i risultati ottenuti ci forniscono adunque dei dati notevoli sulle costanti termiche del filamento, che non potevano essere dedotti per altra via allo stato attuale dei nostri mezzi sperimentali.

⁽¹⁾ Ricerche analoghe eseguite con lampade Z da 105 volt e 30 candele, alimentate a 102 volt, diedero

$$a \theta = 0,015; \quad \frac{c}{a} = 3,4.$$