ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Sugli integrali curvilinei.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Nel calcolo delle variazioni si considera l'integrale di una funzione $F(x, y, x', y')$ (positivamente omogenea, del grado 1, rispetto alle x', y', e soddisfacente a certe condizioni di continuità e derivabilità) calcolato lungo curve $C: x = x(t)$, $y = y(t)$, tali che esistano finite e continue, eccettuati al più un numero finito di punti, le derivate $x'(t), y'(t)$; e ci si accontenta di dire che l'integrale non cambia per una trasformazione parametrica delle curve, ottenuta mediante la $t = t(\tau)$, quando si supponga la funzione $t(\tau)$ continua, a derivata maggiore di zero. Questa ipotesi è di troppo restrittiva; e poichè è interessante sapere fin dove è possibile spingere la trasformazione detta, senza alterare il valore dell'integrale della F, — specie oggidì che cominciano a considerarsi anche curve *semplicemente rettificabili*, — noi ci proponiamo di studiare appunto tale questione nella presente Nota.

1. Supporremo le nostre curve C, continue, rettificabili e giacenti in un campo A, in ogni punto (x, y) del quale e per qualunque coppia (x', y') di numeri finiti *non nulli insieme*, si immagina data una funzione continua (¹) $F(x, y, x', y')$, la quale sia *positivamente omogenea* (²), del grado 1, rispetto alle variabili x', y': vale a dire, soddisfi alla relazione

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y'),$$

per qualsiasi $k > 0$.

2. Prima di procedere, occorre fare un'osservazione. Sia in un intervallo (τ_0, τ_1) la funzione continua, non decrescente, $t = t(\tau)$; con $t_0 = t(\tau_0)$, $t_1 = t(\tau_1)$. La sua funzione inversa $\tau = \tau(t)$, considerata in (t_0, t_1), sarebbe ad un valore se la $t(\tau)$ non fosse costante in nessun tratto; ma poichè tale ipotesi non è stata da noi fatta, potrà la $\tau(t)$ essere a determinazione multipla. Notiamo, però, che, se ad un valore t di (t_0, t_1) la $\tau = \tau(t)$ non fà corrispondere un sol valore τ di (τ_0, τ_1), a t devono corrispondere tutti i punti di un intervallo (τ', τ''), e solamente essi. Ne viene che, per la $\tau = \tau(t)$, ad ogni insieme E_t di punti di (t_0, t_1) corrisponde un insieme E_τ ben determinato di (τ_0, τ_1); e ad un intervallo (t', t''), un intervallo (τ', τ''). Dopo ciò, osserviamo che la $t(\tau)$, per essere non decrescente, è a variazione limitata ed ammette quindi derivata finita, $t'(\tau)$, in ogni punto di (τ_0, τ_1), ad eccezione, al più, di un insieme di misura nulla. Se in questo poniamo, per definizione, $t'(\tau) = 0$, abbiamo, in tutto (τ_0, τ_1), $t'(\tau) \geq 0$, ed anche

(¹) Qui non poniamo alcuna condizione sulla derivabilità della F.

(²) Denominazione di Bolza (*Lectures on the Calculus of Variations*. Chicago, 1904).

$\int_{\tau'}^{\tau''} t'(\tau)\, d\tau \leq t(\tau'') - t(\tau')$ [1]. Da ciò segue che, se (t', t''), (τ', τ'') sono due intervalli corrispondentisi nel modo sopra detto, è, indicando con $m[(t', t'')]$ la misura di (t', t''), $m[(t', t'')] = t'' - t' \geq \int_{\tau'}^{\tau''} t'(\tau)\, d\tau$.

Si prenda, ora, una successione infinita di gruppi J_t di intervalli senza punti comuni di (t_0, t_1), racchiudenti l'insieme E_t, in modo che ogni J_t sia contenuto nel precedente e che la misura $m(J_t)$ tenda a $m(E_t)$. Siano J_τ, E_τ, gli aggregati corrispondenti a J_t, E_t. È $m(J_t) \geq \int_{J_\tau} t'(\tau)\, d\tau$, e poichè J_τ contiene E_τ, $m(J_t) \geq \int_{J_\tau} t'(\tau)\, d\tau \geq \int_{E_\tau} t'(\tau)\, d\tau$. Essendo poi $\lim m(J_t) = m(E_t)$, se ne conclude $m(E_t) \geq \int_{E_\tau} t'(\tau)\, dt$. Da ciò risulta che, *se E_t è di misura nulla, in E_τ è $t'(\tau) = 0$, ad eccezione al più di un insieme di misura nulla e_τ* [2].

3. Sia ora una delle curve C (n. 1), e sia $x = x(s)$, $y = y(s)$, $(s_0 \leq s \leq s_1)$ la sua rappresentazione parametrica in funzione dell'arco. Come si sa [3] in tutti i punti di (s_0, s_1), eccettuati al più quelli di un insieme di misura nulla $\mathcal{E}_s$, le derivate $x'(s)$, $y'(s)$, esistono determinate e finite, e soddisfano all'uguaglianza $\overline{x}'^2(s) + \overline{y}'^2(s) = 1$. E poichè il campo dei punti (x, y, x', y') tali che (x, y) sia su C e x', y' soddisfino alla relazione $x'^2 + y'^2 = 1$ è finito e chiuso, la $F(x, y, x', y')$ supposta continua, è in esso limitata. Ne viene che, ad eccezione dell'insieme di misura nulla detto, la $F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))$ — che poniamo uguale allo zero nei punti ove le $x'(s)$, $y'(s)$ non esistano o sono ambedue nulle — è pure limitata. Perciò tale funzione, che nell'insieme complementare di $\mathcal{E}_s$, $C(\mathcal{E}_s)$, è, per un noto teorema [4], della classe 1 (classificazione di Baire) e quindi misurabile, è anche integrabile. Esiste dunque determinato e finito l'integrale $\int_{s_0}^{s} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds$, per ogni s di (s_0, s_1). Ciò posto,

[1] Per vederlo, basta riprendere i ragionamenti fatti da G. Vitali nella sua Nota: *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1907-08), al Cap. II, § 2, per dimostrare l'integrabilità di un numero derivato di una funzione a variazione limitata.

[2] Il ragionamento qui usato mi è stato suggerito da quello di cui si è servito il Lebesgue (*Sur les intégrales singuliers*, Ann. de la Fac. de Toulouse, 3e S., I) per dimostrare la medesima posizione nel caso di una funzione integrale, non decrescente, $t(\tau)$.

[3] Vedi Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des functions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904), pag. 126.

[4] Vedi Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1905).

prendiamo a considerare la rappresentazione generale della curva C in funzione di un parametro arbitrario t: $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$, $(t_0 \leq t \leq t_1)$.

Se indichiamo con $S(t)$ la lunghezza della curva, questa funzione risulta positiva, continua e non decrescente, e come tale — essendo a variazione limitata — ammette, per tutti i valori di t dell'intervallo (t_0, t_1), ad eccezione al più di quelli di un insieme di misura nulla e'_t, derivata determinata e finita. Posto $I(s) = \int_{s_0}^{s} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds$ — dove s_0 ed s sono i valori di $s(t)$ che corrispondono a t_0, t — questa $I(s)$ risulta funzione continua, a traverso la s, di t; vogliamo mostrare che ammette in tutti i punti di (t_0, t_1), eccettuati quelli di un insieme di misura nulla, derivata uguale a $F(x(s(t)), y(s(t)), x'_s(s(t)), y'_s(s(t)))\, s'(t)$. L'integrale $I(s)$, come funzione del suo estremo superiore s, ammette in tutti i punti di (s_0, s_1), meno quelli di un insieme E_s di misura nulla, per derivata la funzione sotto il segno $F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))$. Indichiamo con E_t l'aggregato dei punti dell'intervallo (t_0, t_1) che la $s(t)$ fa corrispondere ad E_s; per quanto si è detto al n. precedente, è in E_t, esclusi al più i punti di un gruppo e_t di misura nulla, $s'(t) = 0$. Si ha, allora, in ogni punto di $C(E_t)$ che non appartiene ad e'_t,

$$(1) \qquad I'_t(s(t)) = I'_s(s(t)) \,.\, s'(t) = F(x(s(t)) \,.\, y(s(t)) \,,\, x'_s(s(t)) \,,\, y'_s(s(t)))\, s'(t) \,;$$

e la stessa uguaglianza vale anche per quei punti di E_t che non appartengono all'insieme $e'_t + e_t$, perchè in essi è $s'(t) = 0$. Dunque, eccettuati i punti dell'insieme di misura nulla $e'_t + e_t$, $I(s(t))$ ammette derivata rispetto a t, e vale la (1). E poichè $s'(t)$, come derivata di una funzione a variazione limitata, è certamente integrabile, tale è anche la $I'_t(s(t))$, perchè la funzione $F(x(s(t), y(s(t)), x'_s(s(t), y'_s(s(t)))$ è in (t_0, t_1) limitata. Consideriamo, ora, l'espressione $F(x_1(t), y_1(t), x'_1(t), y'_1(t))$. Essendo $x_1(t), y_1(t), s(t)$, a variazione limitata, le derivate $x'_1(t)$, $y'_1(t)$, $s'(t)$, esistono finite in tutti i punti di (t_0, t_1), ad eccezione al più di un insieme di misura nulla E. La F non è definita in quei punti di E nei quali non esistono entrambi le $x'(t), y'(t)$, ed in quelli di $C(E)$ ove esse esistono, ma sono ambedue nulle. Negli uni e negli altri porremo, per definizione, $F(x_1(t), y_1(t), x'_1(t), y'_1(t)) = 0$. Vogliamo mostrare che in $C(E)$ è sempre

$$(2) \qquad F(x_1(t), y_1(t), x'_1(t), y'_1(t)) = F(x(s(t)), y(s(t)), x'_s(s(t)), y'_s(s(t)))\, s'(t) \,.$$

Indichiamo con $C_1(E)$ il gruppo dei punti di $C(E)$ in cui è $s'(t) = 0$; con $C_2(E)$ quello dei rimanenti. È, se $s(t+\delta) - s(t) > 0$,

$$(3) \qquad \frac{x_1(t+\delta) - x_1(t)}{\delta} = \frac{x_1(t+\delta) - x_1(t)}{s(t+\delta) - s(t)} \cdot \frac{s(t+\delta) - s(t)}{\delta} \,,$$

da cui, essendo

$$\left|\frac{x_1(t+\delta)-x_1(t)}{s(t+\delta)-s(t)}\right| \leq 1\,, \quad \left|\frac{x_1(t+\delta)-x_1(t)}{\delta}\right| \leq \frac{s(t+\delta)-s(t)}{\delta}\;;$$

se poi fosse $s(t+\delta)-s(t)=0$, sarebbe a più forte ragione $x_1(t+\delta)-$ $-\,x_1(t)=0$. Se ne deduce che nei punti di $C_1(E)$ è $x_1'(t)=0$; ed analogamente $y_1'(t)=0$. È dunque, nei punti detti, $F(x_1(t)\,,y_1(t)\,,x_1'(t)\,,y_1'(t))=0$; ed essendo $s'(t)=0$, vale in $C_1(E)$ la (2). Sia t un punto di $C_2(E)$; poichè in esso vale la (3), per δ abbastanza piccolo, esiste $x_s'(s)$, ed è $x_1'(t)=$ $=x_s'(s(t))\,s'(t)$. Analogamente esisterà nei punti di $C_2(E)$ la $y_s'(s)$, e si avrà $y_1'(t)=y_s'(s(t))\,s'(t)$. Ne viene che in $C_2(E)$ vale la (2), la quale risulta così dimostrata in tutto $C(E)$. Essendo E di misura nulla ed esistendo l'integrale del secondo membro di tale uguaglianza, esiste anche quello del prino ed è

$$\begin{aligned}(4)\qquad &\int_{t_0}^{t} F(x_1(t)\,,y_1(t)\,,x_1'(t)\,,y_1'(t))\,dt = \\ &\qquad = \int_{t_0}^{t} F(x(s(t))\,,y(s(t))\,,x_s'(s(t)\,,y_s'(s(t)))\,s'(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Concludiamo con la seguente proposizione: *qualunque siano le funzioni continue* $x=x_1(t)\,,y=y_1(t)$, *che rappresentano in* $(t_0\,,t_1)$ *la curva rettificabile* C, *esiste sempre l'integrale*

$$\int_{t_0}^{t} F(x_1(t)\,,y_1(t)\,,x_1'(t)\,,y_1'(t))\,dt\,,\ (t_0 \leq t \leq t_1)\,,$$

dove F rappresenta lo zero nei punti nei quali una delle derivate $x_1'(t)\,,y_1'(t)$ non esiste, ed in quelli ove è $x_1'(t)=y_1'(t)=0$.

4. Supponiamo le $x_1(t)\,,y_1(t)$, *assolutamente continue* (1); allora è tale anche $s(t)$ (2) ed è $s(t)=\int_{t_0}^{t} s'(t)\,dt$. Essendo poi $s(t)$ funzione non mai decrescente di t, segue da un teorema sull'integrazione per sostituzione, dovuto ad H Lebesgue (3), e dalla (4)

$$(5)\qquad \int_{s(t_0)}^{s(t)} F(x(s)\,,y(s)\,,x'(s)\,,y'(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} F(x_1(t)\,,y_1(t)\,,x_1'(t)\,,y_1'(t))\,dt\,.$$

Dunque, *se sono assolutamente continue le funzioni* $x_1(t)\,,y_1(t)$ — *oppure se lo è* $s(t)$ — *vale la* (5).

(1) Diremo, con G. Vitali [*Sulle funzioni integrali* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1904-05)] *assolutamente continua* una funzione $f(x)$ in $(a\,,b)$, se preso un numero positivo σ, piccolo a piacere, esiste poi sempre un corrispondente μ, maggiore di zero, tale che sia $|\Sigma\{f(\beta_i)-f(\alpha_i)\}| < \sigma$, dove la sommatoria è estesa ad un qualsiasi gruppo d'intervalli $(\alpha_i\,,\beta_i)$, senza punti comuni, di $(a\,,b)$, avente una misura minore di μ.

(2) L. Tonelli, *Sulla rettificazione delle curve* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1907-08).

(3) *Sur les integrales singuliers* (loc. cit.).

Si ha anche che *se* $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$; $x = x_2(\tau)$, $y = y_2(\tau)$, *sono due rappresentazioni della stessa curva* C, *e se tutte le funzioni scritte sono assolutamente continue, allora è*

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{F}(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau} \mathrm{F}(x_2(\tau), y_2(\tau), x_2'(\tau), y_2'(\tau))\, d\tau.$$

In queste proposizioni si può sostituire l'assoluta continuità con l'esistenza di un numero derivato finito in tutti i punti dell'intervallo in cui si considera, eccettuati al più quelli di un insieme riducibile.

5. Le condizioni dianzi trovate sono solo sufficienti: per giungere a quelle che sono anche necessarie, faremo l'ipotesi che la F sia sempre diversa da zero. Dimostriamo, allora, che *affinchè valga, per ogni* t *di* (t_0, t_1) *l'uguaglianza*

$$(6) \qquad \int_{s(t_0)}^{s(t)} \mathrm{F}(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} \mathrm{F}(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt$$

è necessario che la $s(t)$ *sia assolutamente continua.* Non lo sia, se è possibile. Dovrà esistere un σ tale che, per quanto piccolo si prenda il numero positivo μ, si possa poi sempre trovare un gruppo d'intervalli (α_i, β_i) senza punti comuni e di somma minore di μ, in modo da rendere soddisfatta la disuguaglianza $\sum_i \{s(\beta_i) - s(\alpha_i)\} > \sigma$. Osserviamo qui che, eccettuati i valori di s di un insieme di misura nulla, è $\overline{x}'^2(s) + \overline{y}'^2(s) = 1$; e poichè la F nei punti $(x(s), y(s), x'(s), y'(s))$ corrispondenti è continua e diversa da zero, e perciò anche maggiore di un minimo $m > 0$, fisso, se per es. è $\mathrm{F} > 0$, possiamo scrivere

$$\int_{s(\alpha_i)}^{s(\beta_i)} \mathrm{F}(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds > m\,\{s(\beta_i) - s(\alpha_i)\},$$

$$\sum_i \int_{s(\alpha_i)}^{s(\beta_i)} \mathrm{F}(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds > m\sigma,$$

e ciò vale comunque si prenda piccolo il μ, numero maggiore della somma degli intervalli (α_i, β_i).

Questo prova che la funzione di t che figura al primo membro della (6) non è assolutamente continua; e poichè, invece, lo è quella del secondo, giungiamo ad un assurdo. La proposizione propostaci è così dimostrata; e possiamo dire, riunendo il risultato qui ottenuto e quello del n. precedente, che la *continuità assoluta della* $s(t)$ (o delle $x_1(t)$, $y_1(t)$) *è condizione necessaria e sufficiente affinchè valga la* (6), *quando la* F *sia sempre diversa da zero.* Abbiamo anche: *se la* F *è sempre diversa da zero e se le* $x_1(t)$,

$y_1(t)$ sono assolutamente continue, la condizione necessaria e sufficiente affinchè valga, per ogni t di (t_0, t_1) la

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{F}(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau} \mathrm{F}(x_2(\tau), y_2(\tau), x_2'(\tau), y_2'(\tau))\, d\tau,$$

è che siano tali anche le $x_2(\tau), y_2(\tau)$.

6. Nel caso della $\mathrm{F} \neq 0$ e, per es., maggiore di zero, possiamo provare che: *l'integrale $\int_{t_0}^{t} \mathrm{F}dt$, al variare della rappresentazione parametrica della curva, assume tutti i valori possibili compresi tra un minimo, uguale allo zero, ed un massimo, dato da $\int_{s_0}^{s} \mathrm{F}(ds)$.* Riprendiamo l'integrale $\mathrm{I}(s)$ del n. 3. Per l'ipotesi qui fatta su F, $\mathrm{I}(s)$ è, come la $s(t)$, funzione non decrescente; tale è, perciò, anche $\mathrm{I}(s(t))$. Si ha così, per un'osservazione già fatta a proposito dell'integrale di $t'(\tau)$ (n. 2),

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{I}_t'(s(t))\, dt \leq \mathrm{I}(s(t)) - \mathrm{I}(s(t_0)) = \mathrm{I}(s(t)).$$

Ma è (n. 3)

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{I}_t'(s(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} \mathrm{F}(x(s(t)), y(s(t)), x_s'(s(t)), y_s'(s(t)))\, s'(t)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \mathrm{F}(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt,$$

e quindi

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{F}(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt \leq \int_{s_0}^{s} \mathrm{F}(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds.$$

Per mostrare, ora, che il valore dell'integrale di F può ridursi a zero, consideriamo nell'intervallo $(0, 1)$ l'insieme J di Cantor, costituito dai punti di ascissa $t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots$, dove i numeratori a sono uguali a zero, oppure a 2; e definiamo su $(0, 1)$ la seguente funzione: su J sia $\varphi(t) = \left\{ \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots \right\}$, per $t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots$, negli intervalli contigui ad J la $\varphi(t)$ sia costante. È dunque $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, vale a dire la $\varphi(t)$ non è costante in tutto $(0, 1)$; si vede poi facilmente che essa è continua, non decrescente e non assolutamente continua [1]. Ciò posto, si consideri il tratto $(0 \leq s \leq 1)$ della curva $\mathrm{C}: x = x(s), y = y(s)$, e si ponga $s = \varphi(t)$: si avrà $x = x_1(t), y = y_1(t)$.

[1] Di questo esempio si è servito il Lebesgue (*Leçons sur l'intégration etc.*, pag. 55) per mostrare che il calcolo della variazione totale di una funzione non può essere fatto servendosi di gruppi di infiniti intervalli contigui ad insiemi non riducibili.

La $\varphi(t)$ è costante — ed è perciò $\varphi'(t) = 0$ — in tutti i tratti contigui ad J, le cui lunghezze hanno una somma uguale ad 1; da ciò segue che, essendo $\varphi'(t) \neq 0$ solo nei punti di J, insieme di misura nulla, è (per la (4))

$$\int_0^1 F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt =$$

$$= \int_0^1 F(x(\varphi(t)), y(\varphi(t)), x_s'(\varphi(t)), y_s'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = 0 .$$

Dall'arco $(0, 1)$ si passa facilmente a quello (s_0, s) che corrisponde a (t_0, t). Pure facilmente si vede ora che con una appropriata rappresentazione parametrica della curva C, si può fare assumere all'integrale di F qualunque valore compreso tra 0 e $\int_{s_0}^{s} F ds$. Osserviamo che, mentre la $s = \varphi_1(t)$ che rende nullo l'integrale di F è solo non decrescente, è possibile trovare delle trasformazioni $s = \varphi_1(t)$, con $\varphi_1(t)$ *sempre crescente* e tale che sia, ovunque, $\dfrac{\varphi_1(t+h) - \varphi_1(t)}{h} \geq \sigma > 0$, per le quali l'integrale vada tendendo a zero con σ: basta, infatti, considerare la $\varphi_1(t) = \varphi(t) + \sigma t$.

Da quanto precede risulta che l'integrale di F si può rendere uguale a zero anche se la condizione $F \neq 0$ non è verificata.

Chimica. — *Sulla sintesi diretta dei gliceridi* [1]. Nota II di I. Bellucci, presentata dal Socio E. Paternò.

In continuazione di una mia Nota: *Sulla sintesi diretta dei gliceridi*, recentemente pubblicata in questi Rendiconti [2], comunico altri risultati ottenuti proseguendo le indagini sperimentali sopra tale processo sintetico, il cui interesse, sia dal lato teorico che industriale, mal giustifica le poche e fallaci conoscenze che finora si avevano sul suo andamento.

A maggiore comprensione dei risultati da me ottenuti rammento che gli indirizzi chimici sinora seguiti per effettuare la sintesi diretta dei gliceridi si riducono ai due seguenti:

1°. *Sintesi tipo Berthelot* [3] (1854). — La miscela acido grasso-glicerina (o anche acido grasso e mono- o digliceride), nella quale prevale a seconda dei casi un forte eccesso di parte acida o di glicerina, viene scaldata a 200°-260° entro tubo chiuso alla lampada, per un tempo generalmente molto lungo. Il rendimento in gliceride è in tal modo molto debole,

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Roma.
[2] Vol. XX, Serie 5ª, 1° semestre, pag. 125.
[3] *Annales de chim. et phys.* [3] *41*, 216.