ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Val la pena di rilevare che quest'ultima formula può essere considerata come quel caso particolare della relazione dispari (I), che si riferisce alla funzione $\gamma(f) = f = \varphi + i\psi$: si ha infatti, per tale funzione, $\alpha' = \beta = 1$ sulla retta $\psi = 1$. Si noti tuttavia che $\gamma(f) = f$ non è una di quelle funzioni, per cui la formula (I) può ritenersi senz'altro trasportabile dal cerchio, in base a quanto precede. In realtà lo è, come vedremo più innanzi. Intanto ho voluto, a titolo d'esempio, fare il calcolo diretto dell'integrale.

Passiamo alla funzione $\Lambda(\varphi_1, \varphi)$, e consideriamone il modo di variare con φ_1 in corrispondenza ad un valore (finito) generico di φ. Dalla (15) apparisce che Λ ha una singolarità logaritmica per $\varphi_1 = \varphi$, si mantiene regolare per ogni altro valore reale di φ_1, convergendo, per $\varphi_1 = \pm\infty$, verso i limiti $\pm\pi\varphi$ rispettivamente. Questo infirma la integrabilità della Λ (rispetto a φ_1) da $-\infty$ a $+\infty$.

Mostrerò in una prossima Nota come si possa allargare il campo di validità delle equazioni integrali (I), (II).

Matematica. — *Contributo allo studio delle funzioni permutabili*. Nota del Socio VITO VOLTERRA.

§ 1. — OSSERVAZIONI SULLA COMPOSIZIONE.

1. La operazione di *composizione* (composizione di prima specie) delle due funzioni finite e continue f e φ,

$$\int_x^y f(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi$$

si può evidentemente considerare indipendentemente dalla permutabilità delle due funzioni [1]. Rappresentandone il resultato col simbolo $f\varphi\,(x, y)$ o più semplicemente col simbolo $f\varphi$, avremo che se f e φ non saranno permutabili $f\varphi$ sarà diverso da φf.

La operazione stessa gode in generale della proprietà associativa. Infatti

$$\int_x^y f(x, \xi)\, d\xi \int_\xi^y \varphi(\xi, \eta)\, \psi(\eta, y)\, d\eta = \int_x^y \psi(\eta, y)\, d\eta \int_x^\eta f(x, \xi)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi .$$

Potremo dunque enunciare il teorema: *Siano o no permutabili le funzioni f, φ, ψ, avremo sempre*

$$(f\varphi)\,\psi = f(\varphi\psi) .$$

2. Da questa proposizione discende immediatamente l'altra che enunciammo in una precedente Nota [2], cioè che *tutte le funzioni ottenute per*

[1] Cfr. *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*. Rend. Acc. dei Lincei, Seduta del 20 febbraio 1910, § 1.

[2] Ibid.

composizione da più funzioni permutabili sono permutabili fra loro e colle funzioni date.

Infatti, se f, φ, ψ sono permutabili, avremo

$$(f\varphi)\psi = f(\varphi\psi) = f(\psi\varphi) = (f\psi)\varphi = (\psi f)\varphi = \psi(f\varphi).$$

§ 2. — Risoluzione di equazioni integrali.

1. Se f e φ sono funzioni derivabili, ed inoltre sono rispettivamente funzioni di ordini m ed n [1] con $m > n$, l'equazione integrale di prima specie

$$f(x, y) = \int_x^y \psi(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi \tag{1}$$

ammette un'unica soluzione che è la soluzione dell'equazione integrale di seconda specie

$$f_n(x, y) = \psi(x, y)\, \varphi_{n-1}(y, y) + \int_x^y \psi(x, \xi)\, \varphi_n(\xi, y)\, d\xi, \tag{2}$$

ove si è scritto in generale

$$f_p(x, y) = \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial y^p} \quad , \quad \varphi_p(x, y) = \frac{\partial^p \varphi(x, y)}{\partial y^p}.$$

Ciò si riconosce immediatamente derivando n volte l'equazione (1) e tenendo conto che

$$\begin{array}{llll} \varphi_p(y, y) = 0 & , \text{ se } p < n-1 & , & \varphi_{n-1}(y, y) \gtrless 0 \\ f_p(x, x) = 0 & , \text{ se } p \leq n-1 & & \end{array}$$

ed osservando inoltre che, ogni funzione che soddisfa la (1) deve verificare la (2) e reciprocamente.

2. Dimostriamo ora che *se f e φ sono permutabili, ψ è permutabile con ambedue queste funzioni.*

Infatti la (1) si potrà scrivere

$$f = \psi\varphi$$

quindi

$$\varphi f = \varphi(\psi\varphi) = (\varphi\psi)\varphi \tag{3}$$

$$f\varphi = (\psi\varphi)\varphi \tag{4}$$

Ma per ipotesi $\varphi f = f\varphi$, onde, se risolviamo la equazione (3) considerando $\varphi\psi$ come incognita, troveremo, in virtù di quanto è detto precedentemente, la stessa soluzione che risolvendo la (4) in cui si consideri $\psi\varphi$ come inco-

[1] Nella presente Nota supporremo sempre, senza ripeterlo esplicitamente ogni volta, che le funzioni che si considerano siano finite e continue e così le derivate loro di cui si deve tener conto. Per la definizione di *ordine* di una funzione, vedi: *Sulle funzioni permutabili*. Rend. Acc. dei Lincei, Seduta del 17 aprile 1910, § 3.

gnita. Ne segue che

$$\varphi\psi = \psi\varphi$$

onde φ e ψ sono permutabili ed in conseguenza sono pure permutabili f e ψ.

3. È facile riconoscere che, risolvendo la (1), *la soluzione* ψ *sarà di ordine* $m - n$. Quindi, se i numeri m ed n saranno primi fra loro, colla risoluzione di successive equazioni integrali potremo sempre trovare funzioni di primo ordine permutabili con f e con φ.

4. In modo perfettamente analogo a quanto si è fatto precedentemente si dimostra che, *se* f *e* φ *sono funzioni permutabili di ordini respettivamente* m ed n *con* $m > np$, *e se*

$$f = \psi\varphi^p ,$$

ψ *è permutabile con* f *e* φ.

§ 3. — Ricerca di tutte le funzioni permutabili con una funzione di 2° ordine.

1. Supponendo $f(x, y)$ di 2° ordine e nota per tutti i valori di x, y, tali che

$$a \leq x \leq y \leq b ,$$

proponiamoci di trovare tutte le funzioni $\varphi(x, y)$ con essa permutabili.

Con un procedimento analogo a quello che abbiamo tenuto in una Nota precedente ([1]) potremo ricondurre il problema al caso in cui si abbia

$$f(x, x) = 0 \quad , \quad f_1(x, x) = -1 \quad , \quad f_2(x, x) = 1$$
$$f_{11}(x, x) = 0 \quad , \quad f_{12}(x, x) = 0 \quad , \quad f_{22}(x, x) = 0 ,$$

avendo posto

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad , \quad f_2(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$$f_{11}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad , \quad f_{12}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} \quad , \quad f_{22}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} .$$

2. Scriviamo

$$\Phi(x, y) = \int_x^y f(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi)\, f(\xi, y)\, d\xi . \tag{5}$$

Avremo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \varphi(x, y) + \displaystyle\int_x^y f_{11}(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \varphi(x, y) + \displaystyle\int_x^y \varphi(x, \xi)\, f_{22}(\xi, y)\, d\xi \end{cases}$$

([1]) *Sopra le funzioni permutabili.* Rend. Acc. dei Lincei, Seduta 17 aprile 1910, § 1.

e ponendo

$$f_{11}(x,y) - f_{11}^2(x,y) + f_{11}^3(x,y) - \cdots = F_{11}(x,y),$$
$$f_{22}(x,y) - f_{22}^2(x,y) + f_{22}^3(x,y) - \cdots = F_{22}(x,y),$$

ove le potenze denotano operazioni di composizione, sarà

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi(x,y) = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \displaystyle\int_x^y F_{11}(x,\xi)\frac{\partial^2\Phi(\xi,y)}{\partial\xi^2}\,d\xi \\ \varphi(x,y) = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \displaystyle\int_x^y F_{22}(\xi,y)\frac{\partial^2\Phi(x,\xi)}{\partial\xi^2}\,d\xi . \end{cases}$$

Ora

$$F_{11}(x,x) = 0 \ , \quad F_{22}(x,x) = 0 \, ,$$

quindi, posto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{11}(x,y)}{\partial y} = \lambda_{11}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 F_{11}(x,y)}{\partial y^2} = \mu_{11}(x,y) \\ \dfrac{\partial F_{22}(x,y)}{\partial x} = \lambda_{22}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 F_{22}(x,y)}{\partial x^2} = \mu_{22}(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_{11}(x,x) = \lambda_1(x) \\ \mu_{11}(x,x) = \mu_1(x) \\ \lambda_{22}(x,x) = \lambda_2(x) \\ \mu_{22}(x,x) = \mu_2(x) \end{cases}$$

e, osservando che $\Phi(x,y)$ è di ordine superiore al secondo e perciò

$$\left(\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}\right)_{x=y} = 0 \, ,$$

le (6) si trasformeranno facilmente, mediante integrazioni per parti, nelle equazioni seguenti

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \lambda_1(x)\,\Phi(x,y) - \int_x^y \mu_{11}(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi$$
$$\varphi(x,y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \lambda_2(y)\,\Phi(x,y) - \int_x^y \mu_{22}(\xi,y)\,\Phi(x,\xi)\,d\xi .$$

Sottraendo si avrà

$$(A)\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + (\lambda_2(y) + \lambda_1(x))\,\Phi(x,y) + \int_x^y [\mu_{11}(x,\xi)\,\Phi(\xi,y) - \mu_{22}(\xi,y)\,\Phi(x,\xi)]\,d\xi = 0 .$$

Dunque $\Phi(x,y)$ deve soddisfare l'equazione integro-differenziale (A).

3. Poniamo

$$g(x,y) = -(\lambda_2(y) + \lambda_1(x))\,\Phi(x,y) - \int_x^y [\mu_{11}(x,\xi)\,\Phi(\xi,y) - \mu_{22}(\xi,y)\,\Phi(x,\xi)]\,d\xi$$

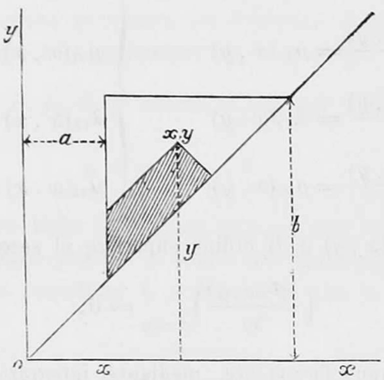
la (A) si scriverà

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = g(x\,,y)\,,$$

d'onde

$$\Phi(x\,,y) = \psi(y-x) + \theta(x+y) + \tfrac{1}{2}\int_{A_{x,y}} g(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

ove ψ e θ denotano due funzioni arbitrarie, e con $\int_{A_{x,y}}$ si intende l'integrale esteso allo spazio $A_{x,y}$ compreso fra la bisettrice degli assi $x\,,y$, le due rette inclinate di 45° sugli assi coordinati condotte per il punto $x\,,y$ e la retta parallela all'asse y che ne dista di a. Lo spazio $A_{x,y}$ è lo spazio tratteggiato indicato nella figura.



Ma, se facciamo $x = y$, abbiamo

$$\Phi(x\,,y) = 0 \quad \text{e} \quad \int_{A_{x,y}} g(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0\,,$$

quindi

$$\psi(0) + \theta(2x) = 0\,,$$

ossia θ deve essere una costante eguale a $-\psi(0)$.

Se dunque prendiamo ψ in modo che si annulli per $x = y$, avremo

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \Phi(x\,,y) = \psi(y-x) + \tfrac{1}{2}\int_{A_{x,y}} g(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta\,,$$

e per conseguenza si potrà sostituire all'equazione integro-differenziale (A) l'equazione integrale (A$'$).

4. Si riconosce facilmente che, nota $\psi(y-x)$, la funzione Φ è determinata dalla (A$'$), ossia se $\psi(y-x)$ è nulla, anche Φ è nulla. Ciò si ot-

tiene impiegando metodi analoghi a quelli che abbiamo adoperato in circostanze simili in precedenti Memorie [1].

La risoluzione della equazione integrale (A′) non presenta difficoltà. La funzione $\Phi(x, y)$ è di terzo ordine o di ordine superiore al terzo, quindi dovremo prendere anche $\psi(y-x)$ di terzo ordine o di ordine superiore al terzo. Si dimostra che, assumendo in tal maniera $\psi(y-x)$, la funzione Φ, ottenuta risolvendo l'equazione integrale (A′), soddisfa le (5) ed è dello stesso ordine di $\psi(y-x)$. Risolvendo una delle (5) si otterranno tutte le funzioni permutabili con $f(x,y)$. In particolare prendendo $\psi(y-x)$ del terzo ordine, $f(x,y)$ risulterà del primo ordine.

Il problema di ottenere tutte le funzioni permutabili con una funzione del secondo ordine è quindi risoluto.

5. Se $f(x, y)$ è della forma $f(y-x)$, allora

$$\lambda_{11}(x, y) = -\lambda_{22}(x, y) = \lambda(y-x),$$

per conseguenza

$$\lambda_1(x) = -\lambda_2(y) = \lambda(0).$$

Inoltre

$$\mu_{11}(x, y) = \mu_{22}(x, y) = \mu(y-x).$$

Ne segue che

$$g(x, y) = \int_x^y [\mu(y-\xi)\, \Phi(x, \xi) - \mu(\xi - x)\, \Phi(\xi, y)]\, d\xi,$$

onde l'equazione integrale (A′) è soddisfatta prendendo

$$\Phi(x, y) = \psi(y-x).$$

Se ne deduce che tutte le funzioni permutabili con $f(y-x)$, appartengono al gruppo delle funzioni permutabili coll'unità.

§ 4. — Risoluzione dell'equazione integrale

$$\text{(I)} \qquad \int_x^y \varphi(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi = \psi(x, y)$$

ove ψ è una funzione data del 2° ordine e φ è incognita.

1. Poniamo

$$x = f(x_1) \quad , \quad y = f(y_1) \quad , \quad \xi = f(\xi_1)$$

con $f'(\xi_1)$ sempre positivo, in modo che le precedenti equazioni possano invertirsi univocamente ed avere

$$x_1 = f_1(x) \quad , \quad y_1 = f_1(y) \quad , \quad \xi_1 = f_1(\xi).$$

[1] *Sulle funzioni permutabili*. Rend. Acc. dei Lincei, Seduta 17 aprile 1910, § 2.

Colla precedente sostituzione si otterrà

$$\int_{x_1}^{y_1} \varphi(x_1, \xi_1)\, \varphi(\xi_1, y_1)\, f'(\xi_1)\, d\xi_1 = \psi(x_1, y_1)\,. \tag{7}$$

Sia

$$\sqrt{f'(x_1)\, f'(y_1)}\; \varphi(x_1, y_1) = \varphi_1(x_1, y_1)$$
$$\sqrt{f'(x_1)\, f'(y_1)}\; \psi(x_1, y_1) = \psi_1(x_1, y_1)\,.$$

La equazione (7) si scriverà

$$\int_{x_1}^{y_1} \varphi_1(x_1, \xi_1)\, \varphi_1(\xi_1, y_1)\, d\xi_1 = \psi_1(x_1, y_1).$$

Supponiamo ora che

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x, y)}{y - x} = \lambda^2(x)\,.$$

Potremo assumere $\lambda(x)$ diverso da zero e positivo. Ma

$$\lim_{y_1=x_1} \frac{y - x}{y_1 - x_1} = f'(x_1) = \frac{1}{f_1'(x)}\,,$$

quindi

$$\lim_{y_1=x_1} \frac{\psi_1(x_1, y_1)}{y_1 - x_1} = \left(\frac{\lambda(x)}{f_1'(x)}\right)^2,$$

onde, preso $f_1'(x) = \lambda(x)$, avremo

$$\lim_{y_1=x_1} \frac{\psi_1(x_1, y_1)}{y_1 - x_1} = 1\,.$$

Potremo dunque, con una conveniente trasformazione di variabili e di funzioni, ricondurre la equazione (I) al caso in cui sia

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x, y)}{y - x} = 1\,.$$

Noi ammetteremo quindi soddisfatta senz'altro questa condizione.

2. Ciò premesso calcoliamo, col procedimento indicato nel paragrafo precedente, una funzione $\theta(x, y)$ di primo ordine permutabile con $\psi(x, y)$. È facile riconoscere, da quanto si è trovato nel detto paragrafo, che $\theta(x, x)$ dovrà essere una costante diversa da zero. Moltiplicando quindi $\theta(x, y)$ per un fattore costante, potremo ricondurci al caso in cui $\theta(x, x) = 1$.

Supponiamo che $\psi(x, y)$ e $\theta(x, y)$ ammettano le derivate seconde e poniamo

$$\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} = \theta_2(x, y)\,, \qquad \frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial y^2} = \theta_{22}(x, y)\,, \qquad \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = \psi_{22}(x, y)$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \theta^2(x, y)}{\partial y^2} = \theta_2(x, y) + \theta(x, y)\, \theta_2(y, y) + \int_x^y \theta(x, \xi)\, \theta_{22}(\xi, y)\, d\xi = \lambda(x, y) \\ &\frac{\partial^2(\psi(x, y) - \theta^2(x, y))}{\partial y^2} = \psi_{22}(x, y) - \lambda(x, y) = \mu(x, y)\,. \end{aligned}\right.$$

Risolviamo ora l'equazione integrale

$$\mu(x, y) = \chi(x, y) + \int_x^y \chi(x, \xi)\, \lambda(\xi, y)\, d\xi, \tag{8}$$

considerando $\chi(x, y)$ come funzione incognita, e formiamo la serie (la quale per principii noti [1] sappiamo esser convergente)

$$\varphi(x, y) = \theta(x, y) + \frac{1}{2}\, \theta\chi(x, y) + \tag{II}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}\, \theta\chi^2(x, y) + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\, \theta\chi^n(x, y) + \cdots$$

ove con $\theta\chi^n(x, y)$ si intende il resultato di una operazione di composizione.

Si dimostra facilmente che $\pm\, \varphi(x, y)$ verifica l'equazione (I).

Infatti, integrando due volte la (8), si ricava che

$$\psi(x, y) = \theta^2(x, y) + \int_x^y \chi(x, \xi)\, \theta^2(\xi, y)\, d\xi.$$

χ è per conseguenza permutabile con θ e con ψ (vedi § 2). Ne segue, componendo la serie (II) con se stessa,

$$\varphi^2(x, y) = \theta^2 + \theta^2\chi = \psi(x, y).$$

§ 5. — Osservazioni.

1. Si riconosce facilmente che, se $\varphi_1(x, y)$ e $\varphi_2(x, y)$ sono due funzioni permutabili tali che

$$\int_x^y \varphi_1(x, \xi)\, \varphi_1(\xi, y)\, d\xi = \psi(x, y),$$

$$\int_x^y \varphi_2(x, \xi)\, \varphi_2(\xi, y)\, d\xi = \psi(x, y),$$

essendo ψ una funzione di 2° ordine, deve aversi o

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$$

oppure

$$\varphi_1(x, y) = -\, \varphi_2(x, y)$$

[1] Vedi la Nota citata precedentemente: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* § 3.

2. Consideriamo l'equazione integrale

$$\varphi^n(x\,,y) = \psi(x\,,y) \tag{9}$$

ove φ è la incognita e il simbolo di potenza denota un'operazione di composizione, mentre la funzione data ψ è di ordine np multiplo dell'intero n. Con una trasformazione analoga a quella fatta nel § precedente potremo ricondurci al caso in cui

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x\,,y)}{(y-x)^{np-1}} = 1\,.$$

Se conosciamo una funzione $\theta(x\,,y)$ di ordine p permutabile con $\psi(x\,,y)$ e tale che

$$\lim_{y=x} \frac{\theta^n(x\,,y)}{(y-x)^{pn-1}} = 1\,,$$

risolviamo l'equazione integrale

$$\psi(x\,,y) - \theta^n(x\,,y) = \int_x^y \chi(x\,,\xi)\,\theta^n(\xi\,,y)\,d\xi$$

nella ipotesi che le funzioni θ e ψ posseggano le derivate di ordine n^{esimo}. Calcolata la funzione incognita χ, avremo che la funzione

$$\theta(x\,,y) + \frac{1}{n}\,\theta\chi(x\,,y) +$$
$$+ \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\,.\,2}\,\theta\chi^2(x\,,y) + \cdots + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-q+1\right)}{q\,!}\,\theta\chi^q(x\,,y) + \cdots$$

soddisfarà l'equazione (9).

3. Quando $\psi(x\,,y)$ è della forma $\psi(y-x)$, potremo prendere

$$\theta(x\,,y) = \frac{[(np-1)!]^{\frac{1}{n}}}{(p-1)!}\,(y-x)^{p-1}\,.$$

Nella ipotesi $p=1$, si ricade nella soluzione data in una Nota precedente [1].

[1] *Sopra le funzioni permutabili.* Rend. Acc. Lincei, Seduta 17 aprile 1910, § 4.