ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Infatti sono *stabili al permanganato*: *benzolo, nitrobenzolo ed acetofenone; tiofene, nitrotiofene ed acetotienone;* mentre invece *è instabile il pirrolo* da un lato, e dall'altro *sono stabilissimi nitropirrolo e pirrilmetilchetone.*

Nei composti a catena aperta l'ossidabilità dei doppî legami si mantiene anche nei loro derivati; ed infatti sono instabili al permanganato lo stirolo:

$$\begin{array}{l} CH_2 \\ \| \\ CH\,.\,C_6H_5 \end{array}$$

come anche il nitrostirolo ed il benzilidenacetone:

$$\begin{array}{l} CH\,.\,NO_2 \\ \| \\ CH\,.\,C_6H_5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} CH\,.\,CO\,.\,CH_3 \\ \| \\ CH\,C_6H_5 \end{array}$$

Ancora perciò non si comprende, in base alle solite formule, per quale ragione la sostituzione di un atomo di idrogeno del pirrolo col residuo nitrico od acetico abbia da rendere i doppî legami insensibili rispetto al permanganato di potassio.

Continueremo lo studio di queste reazioni.

Chimica. — *Azione degli acidi nitroso e nitrico sull'indolo e sul pirrolo.* Memoria del Corrispondente ANGELO ANGELI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Meccanica. — *Sulla biforcazione di una vena liquida.* Nota I di U. CISOTTI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

1. — PRELIMINARI.

Un velo liquido che scorre in un piano, tra due *linee libere* λ' e λ'', investe un *profilo rigido* γ, interposto sul suo cammino, indi si biforca (fig. 1).

Si pensi, per fissare le idee, ad una corrente in seno ad un canale (il cui moto avviene, sensibilmente, per piani orizzontali, col medesimo comportamento lungo una stessa verticale) la quale vada a battere contro una delle pile che sorreggono un ponte gettato sovra il canale stesso, oppure contro un ostacolo qualunque.

Possiamo renderci conto dell'andamento qualitativo del moto nel modo seguente.

La vena proviene dall'infinito (praticamente da una distanza abbastanza grande da γ), dove essa ha velocità costante (in valore assoluto) che possiamo assumere $=1$, e i filetti liquidi scorrono, paralleli fra loro e, in particolare, quindi alle linee libere λ' e λ''. Il filetto f che primo fra tutti colpisce il profilo γ in un certo punto O, si arresta, indi si biforca: un ramo segue un tratto ϖ_1, e l'altro un tratto ϖ_2, di γ fino a due punti P_1 e P_2 rispettivamente, in cui abbandonando entrambi il profilo rigido vanno a formare le linee libere λ_1 e λ_2 che si protendono indefinitamente

Piano $z = x + iy$

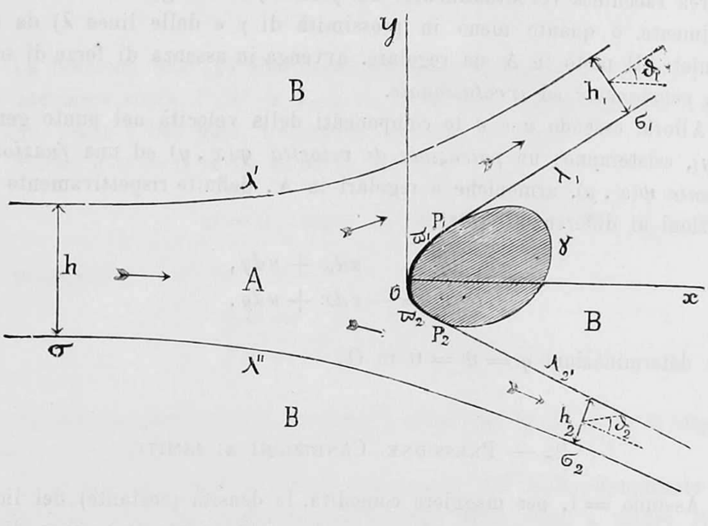

FIG. 1.

a valle. Gli altri filetti, accostandosi a γ, vengono più o meno deviati, ma nessuno subisce arresti: quelli a sinistra di f (rispetto al senso della corrente) vanno a formare la vena limitata tra λ' e $\varpi_1 + \lambda_1$; quelli di destra vanno a formare la vena che scorre tra λ'' e $\varpi_2 + \lambda_2$ [1].

Indico con A il campo del moto che, per quanto si è ora detto, risulta semplicemente connesso e limitato dalle linee libere λ', λ'', λ_1, λ_2 e dai tratti di parete rigida ϖ_1 e ϖ_2.

Si assuma sul piano stesso una coppia di assi ortogonali coll'origine in O; l'asse x sia diretto, come la vena a monte, nel senso della corrente; l'asse y sia diretto verso sinistra.

[1] Quando la vena a monte diviene infinitamente larga, si ha il caso trattato da Levi-Civita, *Scie e leggi di resistenza* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1907, tomo XXIII, pp. 1-37). Il problema più generale che sto per esporre è del resto una nuova applicazione del metodo escogitato da Levi-Civita in detta Memoria.

Sieno: ϑ_1 e ϑ_2 le inclinazioni, sull'asse x, delle direzioni assintotiche delle vene a valle; tali angoli vanno contati positivamente nel verso $x \rightarrowtail y$, negativamente nel verso opposto; 2α l'angolo delle due tangenti in O a ϖ_1 e ϖ_2 ($2\alpha = \pi$ quando O è un punto ordinario, non angoloso); $\delta + \alpha$ l'angolo che la tangente a ϖ_1, nel senso del flusso, forma colla direzione positiva dell'asse x; l'angolo dell'analoga tangente a ϖ_2 sarà allora $\delta - \alpha$ ($\delta = 0$ quando γ è simmetrico e simmetricamente orientato rispetto alla direzione del moto).

Indico con B ciò che rimane del piano del moto quando se ne tolga A e l'area racchiusa (eventualmente) dal profilo γ. La regione B sia occupata (totalmente, o quanto meno in prossimità di γ e delle linee λ) da fluido in quiete. Il moto in A sia regolare, avvenga in assenza di forze di massa, e sia *permanente* ed *irrotazionale*.

Allora, essendo u e v le componenti della velocità nel punto generico (x, y), esisteranno: un *potenziale di velocità* $\varphi(x, y)$ ed una *funzione di corrente* $\psi(x, y)$, armoniche e regolari in A, definite rispettivamente dalle equazioni ai differenziali totali

$$(1) \qquad \begin{cases} d\varphi = \quad u dx + v dy, \\ d\psi = - v dx + u dy, \end{cases}$$

colle determinazioni $\varphi = \psi = 0$ in O.

2. — Pressione. Condizioni ai limiti.

Assumo $= 1$, per maggiore comodità, la densità (costante) del liquido. In A si ha, per ipotesi, moto irrotazionale e permanente, in assenza di forze di massa.

Le equazioni idrodinamiche si compendiano perciò nella seguente relazione fra la pressione p ed il valore assoluto $V = |\sqrt{u^2 + v^2}|$ della velocità nel punto generico (x, y),

$$p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{costante}.$$

Oltre il contorno di A (nella regione confinante B) si ha, per ipotesi, fluido in quiete; ivi regna pertanto una pressione costante p_0. Sulle linee libere l'eguaglianza della pressione porge

$$p_0 = -\frac{1}{2} V^2 + \text{costante},$$

cioè V è essa stessa costante sopra queste linee.

Siccome λ', λ'', λ_1, λ_2 si estendono indefinitamente, e nei punti di A a distanza infinita, a monte, è $V = 1$, così sarà

$$V = 1\,, \quad \text{sopra} \quad \lambda', \lambda'', \lambda_1, \lambda_2 . \tag{2}$$

Dalla relazione $p_0 = -\frac{1}{2}V^2 +$ costante, scende poi che la costante ha il valore $p_0 + \frac{1}{2}$; quindi in ogni punto di A

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2). \tag{3}$$

La funzione $\psi(x, y)$ che, come abbiamo accennato, è armonica in A, deve assumere sopra λ', λ'' e $\lambda_2 + \varpi_2 + \varpi_1 + \lambda_1$ valori costanti e diversi tra loro, come è ben noto, trattandosi di linee di flusso.

Poichè è $\psi = 0$ la O, si dovrà avere

$$\psi = 0\,, \quad \text{sopra} \quad \lambda_1, \varpi_1, \varpi_2, \lambda_2 . \tag{4}$$

Poniamo

$$\begin{cases} \psi = h_1, & \text{sopra} \quad \lambda', \\ \psi = -h_2, & \text{sopra} \quad \lambda''; \end{cases} \tag{5}$$

h_1 e h_2 rappresentano così le *portate* [e quindi per la (2) anche le larghezze assintotiche] delle vene a valle.

Va notato che, pel carattere permanente del moto, designando h la *portata* [e quindi la larghezza assintotica] della vena a monte, si deve avere $h = h_1 + h_2$.

Le (2), (4), (5) esauriscono le condizioni ai limiti.

3. — La variabile complessa $z = x + iy$ e le funzioni w, f, ω.

Posto al solito

$$\begin{cases} x + iy = z, \\ u - iv = w, \\ \varphi + i\psi = f, \end{cases} \tag{6}$$

per le (1) w ed f risultano funzioni di $z = x + iy$, e le (1) stesse si compendiano nella relazione

$$\frac{df}{dz} = w. \tag{7}$$

La $w(z)$ dev'essere naturalmente regolare in A senza mai annullarvisi [cfr. n. 1] e deve mantenersi finita anche all'infinito. Il suo comportamento al contorno si caratterizza come segue.

Pongasi

$$w = e^{-i\omega}, \tag{8}$$

convenendo che per $z = \infty$ $[|w| = 1]$ sia $\omega = 0$; rimane così definita una funzione $\omega(z)$, regolare anch'essa entro A.

Dalla (8), posto

$$\omega = \vartheta + i\tau \quad , \quad (\vartheta \text{ e } \tau \text{ reali}), \tag{9}$$

si deducono le

$$\left\{ \begin{aligned} & |w| = \left|\sqrt{u^2 + v^2}\right| = \mathrm{V} = e^{\tau}, \\ & \frac{u + iv}{\mathrm{V}} = e^{i\vartheta}. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

La parte reale ϑ, che, come apparisce da quest'ultima, definisce la direzione delle linee di flusso, va contata fra $-\pi$ e π, positivamente nel verso $x \longrightarrow y$, partendo dalla direzione positiva dell'asse x, negativamente nel verso opposto.

Dopo ciò, per le precedenti tenuto conto della (2), si ha senz'altro

$$\left\{ \begin{aligned} & \tau = 0\,, \ \text{sopra} \ \lambda', \lambda'', \lambda_1, \lambda_2\,; \\ & \lim \vartheta = \delta + \alpha\,, \ \text{avvicinandosi a O sopra} \ \varpi_1\,, \\ & \lim \vartheta = \delta - \alpha\,, \ \text{avvicinandosi a O sopra} \ \varpi_2\,, \end{aligned} \right. \tag{11}$$

la ϑ dovendo naturalmente seguire anche negli altri punti di ϖ_1 e ϖ_2 l'andamento del profilo rigido.

Lasciando per ora indeterminata la forma del profilo ci basterà ritenere che *la funzione* $\omega(z) = \vartheta(x, y) + i\tau(x, y)$ *dev'essere regolare entro* A; *sul contorno la sua parte reale ed il coefficiente dell'immaginario devono soddisfare alle* (11); *di più che sia* $\omega = 0$ *per* $z = \infty$.

4. — Cambiamenti di variabile.

È opportuno eseguire dei cambiamenti di variabile che permettano di sostituire al campo A un semicerchio. Considerando il piano complesso rappresentativo della variabile $f = \varphi + i\psi$, si constata, in modo analogo a quello che ho esposto in una recente Nota [1], che la $f = f(z)$ permette di rappresentare in modo conforme il campo A del piano z sopra una striscia

[1] Cfr. Cisotti, *Sopra la derivazione dei canali.* Zeitschr. für Math. und Physik, 1911, B. 59, Heft 2, pp. 137-151.

tagliata S del piano f (fig. 2), in modo che alle linee λ' e λ'' corrispondono rispettivamente le rette limiti $\psi = h_1$ e $\psi = -h_2$ della striscia; al ramo di contorno $\lambda_1 + \varpi_1 + \varpi_2 + \lambda_2$ fa riscontro il semiasse reale positivo, e precisamente, immaginando di praticare nel piano f un taglio lungo il detto semiasse reale, il bordo superiore (quello cioè rivolto verso la retta $\psi = h_1$) corrisponde al tratto $\varpi_1 + \lambda_1$, e il bordo inferiore al tratto rimanente $\varpi_2 + \lambda_2$. Ai punti P_1 e P_2 del piano z, in cui ϖ_1 e ϖ_2 si raccordano con λ_1 e λ_2,

Piano $f = \varphi + i\psi$

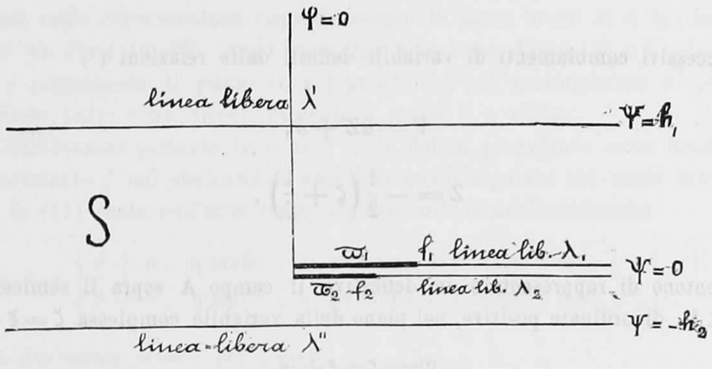

FIG. 2.

fanno riscontro due punti f_1 e f_2 dell'asse reale; il primo appartiene al bordo superiore, l'altro al bordo inferiore.

Pongo

$$
(12) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& F_0 = \frac{h_2 - h_1}{h}, \\
& e^{\varphi_0} = (1 - F_0)^{\frac{h_1}{\pi}} (1 + F_0)^{\frac{h_2}{\pi}}, \\
& e^{-f+\varphi_0} = (1 - F)^{\frac{h_1}{\pi}} (1 + F)^{\frac{h_2}{\pi}},
\end{aligned}
\right.
$$

dove F designa una nuova variabile. L'ultima di queste relazioni riferisce biunivocamente la striscia tagliata S al semipiano F di ordinate positive: al contorno di S corrisponde l'asse reale del piano F, in modo che alla retta $\psi = -h_2$ fa riscontro il tratto $(-\infty, -1)$, mentre alla retta $\psi = h_1$ corrisponde il tratto $(1, +\infty)$; ai bordi del taglio fa riscontro il tratto $(-1, +1)$ e, in modo preciso, al bordo superiore il tratto $(F_0, 1)$, all'inferiore il tratto $(-1, F_0)$ [1].

[1] Cfr. Cisotti, loc. cit., pp. 144-147. Le nostre (12) si deducono dalle (12), (13), (14) della Nota citata, mediante il cambiamento di $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, q_1, q_2$, ed f rispettivamente in F, F_0, h_2, h_1 ed $f + ih_2$.

Ai punti f_1 ed f_2 (rappresentativi dei punti P_1 e P_2 del piano z) corrispondono, a norma dell' ultima delle (12), due punti F_1 ed F_2 definiti dalle relazioni

$$e^{-f_r+\varphi_0} = (1-F_r)^{\frac{h_1}{\pi}}(1+F_r)^{\frac{h_2}{\pi}} \qquad (r=1\,,2)\,. \tag{13}$$

Posto

$$a=\frac{1}{2}(F_1-F_2)\ ,\quad b=\frac{1}{2}(F_1+F_2)\,, \tag{14}$$

i successivi cambiamenti di variabili definiti dalle relazioni (¹)

$$F = aZ + b\,, \tag{15}$$

$$Z = -\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right), \tag{16}$$

consentono di rappresentare in definitiva il campo A sopra il semicerchio $|\zeta| \leq 1$, di ordinate positive, nel piano della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$

Piano $\zeta = \xi + i\eta$

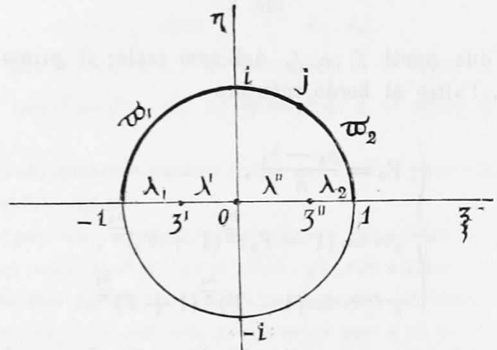

FIG. 3.

(fig. 3), in modo che, le linee libere del piano del moto vengano rappresentate sul diametro $(1\,,-1)$, mentre le pareti rigide ϖ_1 e ϖ_2 sopra la semicirconferenza $(1\,,i\,,-1)$.

(¹) Cfr. Levi-Civita, loc. cit., pp. 12-13; od anche Cisotti, *Vene fluenti*. Rend. Circ. Mat. di Palermo (1908), tomo XXV, pp. 154-156.

E precisamente, posto $\left(\text{si noti che } \left|\frac{b - F_0}{a}\right| < 1\right)$

$$(17) \quad \begin{cases} \cos\sigma_0 = \dfrac{b - F_0}{a}, \quad j = e^{i\sigma_0}, \quad \dfrac{1-b}{a} = -\dfrac{1}{2}\left(\zeta' + \dfrac{1}{\zeta'}\right), \\ \dfrac{1+b}{a} = \dfrac{1}{2}\left(\zeta'' + \dfrac{1}{\zeta''}\right), \end{cases}$$

i due tratti $(-1, j)$ e $(1, j)$ della semicirconferenza corrispondono ai due pezzi di parete rigida ϖ_1 e ϖ_2; mentre che i tratti $(-1, \zeta')$ e $(1, \zeta'')$ dell'asse reale rappresentano rispettivamente le linee libere λ_1 e λ_2; infine i tratti $(0, \zeta')$ e $(0, \zeta'')$ fanno riscontro alle linee libere λ' e λ''. In tal modo j rappresenta il punto O, e i punti $0, \zeta', \zeta''$ corrispondono ai punti all'infinito delle vene, rispettivamente a monte e a valle.

Considerando pertanto la $\omega = \vartheta + i\tau$ del n. precedente come funzione dell'argomento ζ nel semicerchio, essa deve essere regolare nei punti interni, e per le (11) reale sull'asse reale, mentre sulla semicirconferenza

$$\lim \vartheta = \begin{cases} \delta + \alpha, & \text{quando } \zeta \text{ si avvicina a } j \text{ lungo l'arco } (-1, j), \\ \delta - \alpha, & \text{quando } \zeta \text{ si avvicina a } j \text{ lungo l'arco } (1, j); \end{cases}$$

di più dev'essere $\omega = 0$ per $\zeta = 0$.

Poichè la ω assume valori reali sull'asse reale, pel principio di Schwarz essa è continuabile per riflessione analitica nel sottostante semicerchio; essa è quindi regolare in tutto il cerchio $|\zeta| < 1$ e sulla semicirconferenza $(1, -i, -1)$ ha il comportamento che risulta per riflessione.

5. — Integrale generale.

Pongo [1]

$$(18) \qquad \omega_0(\zeta) = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi} \log i \, \frac{-j + \zeta}{1 - j\zeta}.$$

La funzione $\omega_0(\zeta)$ è reale sul diametro $(1, -1)$, regolare per $|\zeta| < 1$ e sulla circonferenza $|\zeta| = 1$ si comporta nel modo voluto. Ciò posto, designi $\Omega(\zeta)$ una funzione di ζ, reale sull'asse reale, regolare per $|\zeta| < 1$, e tale che

$$(19) \qquad \Omega(j) = \Omega\left(\frac{1}{j}\right) = 0,$$

e inoltre

$$(20) \qquad \Omega(0) = \omega_0(0) = \delta - \frac{2\alpha}{\pi}\left(\sigma_0 - \frac{\pi}{2}\right).$$

[1] Cfr. Levi-Civita, loc. cit., pp. 23-24.

Si può concludere che la funzione

$$\omega = \omega_0 - \Omega \tag{21}$$

soddisfa nel modo più generale alle condizioni specificate alla fine del numero precedente; *essa costituisce pertanto l'integrale generale dei moti in questione.*

In una prossima Nota mi occuperò dell'azione meccanica esercitata dalla vena sul profilo γ, illustrando queste generalità con un esempio concreto.

Meccanica. — *Sopra un caso di emisimmetria che si presenta in certe questioni di Idrodinamica.* Nota di G. Colonnetti, presentata dal Socio Levi-Civita.

Nello studio del moto dei fluidi guidati in tutto od in parte da pareti rigide simmetriche rispetto ad un dato piano Π, accade non di rado di imbattersi in casi nei quali gli elementi determinanti il fenomeno soddisfano ad una specie di emisimmetria, cioè sono tali che in punti simmetrici rispetto a Π i parametri scalari sono gli stessi, ed i vettori hanno determinazioni simmetriche, eccezion fatta per le velocità per le quali la simmetria risulta accompagnata da una inversione nel senso.

Ora in consimili casi si ammette da molti idraulici che il sistema delle linee di flusso dipenda, oltrechè da tutti gli altri elementi determinanti, anche dal senso delle velocità, epperò non debba necessariamente presentarsi simmetrico rispetto al piano Π; si ammette cioè che quell'emisimmetria degli elementi determinanti il fenomeno non sia causa sufficiente a determinare un'analoga emisimmetria di tutto il fenomeno [1].

Le brevi ed elementarissime osservazioni che seguono ci permetteranno di asserire il contrario.

***

Un fluido perfetto a temperatura costante, si muova con moto continuo e permanente in una certa regione dello spazio che supporremo, per fissar le idee, semplicemente connessa ed estendentesi fino all'infinito sia a monte che a valle del moto. Detta regione sarà, nel caso più generale, limitata in parte da pareti rigide fisse, ed in parte da superficie di discontinuità o superficie libere, separanti il fluido in moto da un fluido che noi riterremo occupante tutto il resto dello spazio, in quiete, a pressione costante p_0.

[1] È in sostanza a questo concetto fondamentale che fanno capo le note teorie di Herrmann e di Bach sugli effetti dei cambiamenti di direzione delle vene liquide. La Memoria originale di Herrmann: *Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen* (Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen, 1884) venne pubblicata in volume separato nel 1887 e ripubblicata invariata nel 1904 (cfr. pag. 7