ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Si può concludere che la funzione

$$\omega = \omega_0 - \Omega \tag{21}$$

soddisfa nel modo più generale alle condizioni specificate alla fine del numero precedente; *essa costituisce pertanto l'integrale generale dei moti in questione.*

In una prossima Nota mi occuperò dell'azione meccanica esercitata dalla vena sul profilo γ, illustrando queste generalità con un esempio concreto.

Meccanica. — *Sopra un caso di emisimmetria che si presenta in certe questioni di Idrodinamica.* Nota di G. Colonnetti, presentata dal Socio Levi-Civita.

Nello studio del moto dei fluidi guidati in tutto od in parte da pareti rigide simmetriche rispetto ad un dato piano Π, accade non di rado di imbattersi in casi nei quali gli elementi determinanti il fenomeno soddisfano ad una specie di emisimmetria, cioè sono tali che in punti simmetrici rispetto a Π i parametri scalari sono gli stessi, ed i vettori hanno determinazioni simmetriche, eccezion fatta per le velocità per le quali la simmetria risulta accompagnata da una inversione nel senso.

Ora in consimili casi si ammette da molti idraulici che il sistema delle linee di flusso dipenda, oltrechè da tutti gli altri elementi determinanti, anche dal senso delle velocità, epperò non debba necessariamente presentarsi simmetrico rispetto al piano Π; si ammette cioè che quell'emisimmetria degli elementi determinanti il fenomeno non sia causa sufficiente a determinare un'analoga emisimmetria di tutto il fenomeno [1].

Le brevi ed elementarissime osservazioni che seguono ci permetteranno di asserire il contrario.

***

Un fluido perfetto a temperatura costante, si muova con moto continuo e permanente in una certa regione dello spazio che supporremo, per fissar le idee, semplicemente connessa ed estendentesi fino all'infinito sia a monte che a valle del moto. Detta regione sarà, nel caso più generale, limitata in parte da pareti rigide fisse, ed in parte da superficie di discontinuità o superficie libere, separanti il fluido in moto da un fluido che noi riterremo occupante tutto il resto dello spazio, in quiete, a pressione costante p_0.

[1] È in sostanza a questo concetto fondamentale che fanno capo le note teorie di Herrmann e di Bach sugli effetti dei cambiamenti di direzione delle vene liquide. La Memoria originale di Herrmann: *Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen* (Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen, 1884) venne pubblicata in volume separato nel 1887 e ripubblicata invariata nel 1904 (cfr. pag. 7

Indicato con **F** il vettore che rappresenta la forza agente in un punto generico P del campo del moto (riferita all'unità di massa) e con **v** il vettore velocità nel punto generico stesso, l'equazione di continuità del moto (permanente) può scriversi [1]:

$$\text{div}\,(\varrho \mathbf{v}) = 0 \tag{1}$$

ϱ essendo la densità del fluido nel punto generico P legata alla corrispondente pressione p dell'equazione caratteristica

$$\varrho = f(p)\,. \tag{2}$$

Le equazioni generali del moto, scritte sotto la forma di Eulero, si compendiano per altra parte nell'unica relazione [2]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dP}\,\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho}\,\text{grad}\,p \tag{3}$$

da integrarsi tenendo presenti le condizioni ai limiti.

Ora, detta $\Psi(P) = 0$ l'equazione di una qualsiasi superficie limitante il campo del moto, dovrà aversi identicamente

$$\mathbf{v} \times \text{grad}\,\Psi = 0 \tag{4}$$

per tutti gli elementi fluidi pei quali Ψ si annulla. Se la superficie in questione è una parete rigida, la Ψ è data: se è una superficie libera, la sua equazione altro non è che $p - p_0 = 0$: per essa la (4) diviene adunque

$$\mathbf{v} \times \text{grad}\,p = 0\,. \tag{5}$$

---

dell'ultima edizione). Le più note conseguenze di quelle teorie vennero recentemente riconosciute in opposizione coll'esperienza da Bánki: *Ueber unrichtige Anwendung hydraulischer Sätze* (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Band 53, 1909, pp. 1490-1496). Dei risultati delle esperienze di Bánki non mi occuperò qui, avendo già avuto occasione di dimostrare che essi sono suscettibili di una completa ed esauriente conferma teorica nelle mie recenti ricerche: *Sul moto di un liquido in un canale* (in corso di stampa nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo). Mi basta qui far notare che le principali conclusioni a cui il Bánki è stato, in via sperimentale, condotto, concordano perfettamente colle considerazioni esposte in questa Nota: considerazioni le quali peraltro sembrano suscettibili di una assai maggiore generalità. Così, per esempio, esse potrebbero con vantaggio esser tenute presenti nello studio della distribuzione dei vortici che caratterizzano il moto dei fluidi nei tubi in vicinanza di ogni gomito come di ogni variazione brusca di sezione: vortici a cui, nei trattati di idraulica, vengono attribuite, in base a pochi ed incompleti dati sperimentali, forme e posizioni le più svariate e, non di rado, le più irrazionali.

(1) Uso qui le notazioni proposte dai professori C. Burali-Forti e R. Marcolongo nei loro *Elementi di Calcolo Vettoriale* (Bologna 1909 e Parigi 1910).

(2) Cfr. T. Boggio, *Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'idrodinamica.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 30 gennaio 1910.

Con ciò il moto resta completamente determinato quando siano date (in modo opportuno e compatibile) le condizioni all'infinito, cioè le velocità assintotiche $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ rispettivamente a monte ed a valle del movimento. In particolare risulta determinato l'intiero sistema delle linee di corrente caratterizzate, come si sa, dall'equazione generale

$$\mathbf{v} \wedge dP = 0. \tag{6}$$

Ciò premesso si osservi che il vettore $-\mathbf{v}$, definito come il vettore $\mathbf{v}$ in tutto il campo del moto, e come esso soddisfacente alle (1), (4) e (5), può assumersi come velocità di un nuovo moto dello stesso fluido, svolgentesi in quel medesimo campo, fra le stesse pareti rigide, colle identiche superficie libere.

Se $\mathbf{F}$ si mantiene in ogni punto invariato, *se cioè il fluido è soggetto ancora all'azione delle medesime forze* [1], restano invariate, in virtù delle (2) e (3), così la pressione come la densità in ciascun punto. Le linee di corrente del nuovo moto sono, come appare dalla (6), quelle stesse del moto dato, ma percorse in senso contrario; in particolare le velocità assintotiche $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ si sono cambiate rispettivamente in $-\mathbf{v}_1$ e $-\mathbf{v}_2$.

Dimostrata così, in generale, l'invertibilità del moto, introduciamo la ipotesi che le condizioni determinanti il fenomeno primitivo soddisfino alla supposta emisimmetria rispetto al piano Π. Debbono allora in particolare risultare simmetrici rispetto a Π i vettori $\mathbf{v}_1$ e $-\mathbf{v}_2$ o, ciò che fa lo stesso, $-\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Ora in questa condizione di cose tutte le grandezze (scalari, geometriche e vettoriali) le quali caratterizzano, determinandolo, l'ipotetico moto inverso, si possono ottenere dalle condizioni determinanti il fenomeno diretto dato, per riflessione rispetto a Π. Lo stesso perciò deve potersi dire dell'intiero sistema delle linee di corrente le quali dovranno, per simmetria rispetto a Π, trasformarsi in se stesse; dovranno per conseguenza ammettere tutte quel piano per piano di simmetria.

Ciò che si è detto delle linee di corrente vale in particolare naturalmente anche così per le superficie vorticose come per le superficie libere che limitano, insieme alle pareti rigide date, il campo del moto.

[1] Restano così escluse dalle nostre considerazioni le sole forze che dipendono dal senso della velocità: in particolare le resistenze d'attrito, come del resto avevamo presupposto fin dal principio.