ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Sul criterio di Stéphanos.* Nota di A. SIGNORINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Come è noto, Stéphanos [1] ha dato come condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione di due variabili $K(xy)$ sia rappresentabile nella forma

$$K(xy) = \sum_1^m {}_i\, \alpha_i(x)\, \beta_i(y) \tag{I}$$

— ove le $\alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ e le $\beta_i(y)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ sono rispettivamente m funzioni linearmente indipendenti della sola x ed m funzioni linearmente indipendenti della sola y — la seguente: che il determinante

$$\begin{vmatrix} K & \frac{\partial K}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^m K}{\partial x^m} \\ \frac{\partial K}{\partial y} & \frac{\partial^2 K}{\partial x\, \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m+1} K}{\partial x^m\, \partial y} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^m K}{\partial y^m} & \frac{\partial^{m+1} K}{\partial x\, \partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^{2m} K}{\partial x^m\, \partial y^m} \end{vmatrix}$$

sia identicamente nullo.

Questo risultato è una semplice conseguenza del ben noto teorema relativo al Wronskiano di m funzioni di una sola variabile, e come tale è suscettibile di critiche dello stesso genere di quelle che possono muoversi contro tal teorema [2].

Noi mostreremo in questa Nota come, procedendo per altra via, si possa con tutta sicurezza stabilire una proprietà caratteristica delle funzioni della forma (I). Potremo limitarci al caso che la funzione $K(xy)$ sia simmetrica in x ed in y, perchè è ben noto [3] che, data una funzione di due variabili $K(xy)$ qualunque, purchè finita e continua per

$$a \leq x \leq b$$
$$a \leq y \leq b\,,$$

[1] Ved. Stéphanos, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tom. XVIII, 1904.

[2] Ved. ad es. Peano, Rend. Acc. Lincei (5), tom. VI, 1897, 1° sem., pag. 413.

[3] Ved. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.* 1 Teil, § 14 (Math. Ann., Bd. 63).

ciascuna delle due funzioni *simmetriche*

$$\int_a^b K(x\xi)\, K(y\xi)\, d\xi \qquad \int_a^b K(\xi x)\, K(\xi y)\, d\xi$$

per gli stessi valori di x ed y risulta della forma (I) allora ed allora soltanto che lo sia la funzione assegnata.

Sia dunque $K(xy)$ una funzione simmetrica di x ed y finita e continua nel campo S a due dimensioni, definito dalle relazioni

$$a \leq x \leq b$$
$$a \leq y \leq b\,.$$

Poniamo, secondo il solito,

$$K_2(xy) = \int_a^b K(x\xi)\, K(\xi y)\, d\xi \qquad K_3(xy) = \int_a^b K_2(x\xi)\, K(\xi y)\, d\xi \ldots$$

$$K_r(xy) = \int_a^b K_{r-1}(x\xi)\, K(\xi y)\, d\xi \ldots,$$

ed anche

$$c_r = \int_a^b K_r(\xi\xi)\, d\xi\,. \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

Con queste denominazioni avremo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la fuzione simmetrica $K(xy)$ *in tutto il campo* S *risulti della forma* (I), *è che si possa trovare un numero* $n \leq m$ *tale che risultino contemporaneamente soddisfatte le tre relazioni*:

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(\beta) \qquad \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+2} \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{n+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \ldots & c_{2n+2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\gamma) \qquad \begin{vmatrix} m & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} = 0 \text{ [1]}.$$

[1] Si noti che nessuna delle tre condizioni (α) (β) (γ) è una conseguenza delle altre due. Ad es., ponendo

$$K(xy) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \frac{1}{4\pi} \cos x \cos y + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2y$$

ed $a = 0$, $b = 2\pi$, $m = 2$, per $n = 1$ risultano verificate le condizioni (α) (γ) senza che lo sia la (β).

Per dimostrare che le condizioni enunciate sono necessarie, cominciamo dall'osservare che se la funzione simmetrica $K(xy)$ in tutto il quadrato S sarà della forma (I), il nucleo dell'equazione integrale

$$(1) \qquad f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

sarà simmetrico ed elementare: e se indichiamo con

$$u_{1,1}(x)\ u_{1,2}(x) \dots u_{1,m_1}(x)\ ;\ \dots\ ;\ u_{i,1}(x)\, u_{i,2}(x) \dots u_{i,m_i}(x)\ ;\ \dots\ ;$$
$$u_{n,1}(x)\, u_{n,2}(x) \dots u_{n,m_n}(x)$$

un suo sistema perfetto ortogonale normalizzato — intendendo che le funzioni

$$u_{i,1}(x)\ u_{i,2}(x) \dots u_{i,m_i}(x) \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

appartengano ad uno stesso valore eccezionale λ_i $(i = 1, 2, \dots n)$ — avremo in tutto il campo S

$$K(xy) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_1^{m_1}{}_r\, u_{1,r}(x)\, u_{1,r}(y) + \dots + \frac{1}{\lambda_i} \sum_1^{m_i}{}_r\, u_{i,r}(x)\, u_{i,r}(y) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_n} \sum_1^{m_n}{}_r\, u_{n,r}(x)\, u_{n,r}(y)\,.$$

Di qui segue immediatamente che sarà pure in tutto il campo S

$$K_2(xy) = \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_1^{m_1}{}_r\, u_{1,r}(x)\, u_{1,r}(y) + \dots + \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_1^{m_i}{}_r\, u_{i,r}(x)\, u_{i,r}(y) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_1^{m_n}{}_r\, u_{n,r}(x)\, u_{n,r}(y)$$

. . . . . .

$$K_n(xy) = \frac{1}{\lambda_1^n} \sum_1^{m_1}{}_r\, u_{1,r}(x)\, u_{1,r}(y) + \dots + \frac{1}{\lambda_i^n} \sum_1^{m_i}{}_r\, u_{i,r}(x)\, u_{i,r}(y) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_n^n} \sum_1^{m_n}{}_r\, u_{n,r}(x)\, u_{n,r}(y)$$

$$K_{n+1}(xy) = \frac{1}{\lambda_1^{n+1}} \sum_1^{m_1}{}_r\, u_{1,r}(x)\, u_{1,r}(y) + \dots + \frac{1}{\lambda_i^{n+1}} \sum_1^{m_i}{}_r\, u_{i,r}(x)\, u_{i,r}(y) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_n^{n+1}} \sum_1^{m_n}{}_r\, u_{n,r}(x)\, u_{n,r}(y)\,.$$

Ora, il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \\ \frac{1}{\lambda_1^2} & \frac{1}{\lambda_2^2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\lambda_1^n} & \frac{1}{\lambda_2^n} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n^n} \end{vmatrix}$$

è certamente differente da zero, e d'altra parte le funzioni

$$u_{i,j}\,(j = 1\,,2\,,\ldots m_i\,;\, i = 1\,,2\,,\ldots n)$$

sono linearmente indipendenti. Ne segue che le funzioni

$$K_1(xy) \equiv K(xy)\,,\, K_2(xy)\,,\ldots,\, K_n(xy)$$

non potranno esser legate in tutto il campo S da alcuna relazione lineare. Invece per gli stessi valori di x ed y sarà

$$\begin{vmatrix} K_1(xy) & \frac{1}{\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \\ K_2(xy) & \frac{1}{\lambda_1^2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n+1}(xy) & \frac{1}{\lambda_1^{n+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n^{n+1}} \end{vmatrix} = 0\,;$$

e se poniamo

$$K_0(xy) = \sum_1^{m_1}{}_r\, u_{1,r}(x)\, u_{1,r}(y) + \cdots + \sum_1^{m_i}{}_r\, u_{i,r}(x)\, u_{i,r}(y) + \cdots +$$

$$+ \sum_1^{m_n}{}_r\, u_{n,r}(x)\, u_{n,r}(y)\,,$$

sarà pure

$$\begin{vmatrix} K_0(xy) & 1 & \ldots & 1 \\ K_1(xy) & \frac{1}{\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_n(xy) & \frac{1}{\lambda_1^n} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n^n} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Per il ben noto criterio di Gramme relativo alla dipendenza lineare di più funzioni di un numero qualunque di variabili, non potendo nessuna delle

funzioni K_2, K_3 ecc., come nucleo iterato di un nucleo simmetrico, essere identicamente nulla, potremo allora concludere che sarà

$$(A) \qquad \left| \int_a^b \int_a^b K_i(xy)\, K_k(xy)\, dx\, dy \right| \neq 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

$$(B) \qquad \left| \int_a^b \int_a^b K_i(xy)\, K_k(xy)\, dx\, dy \right| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots n+1)$$

$$(\Gamma) \qquad \left| \int_a^b \int_a^b K_i(xy)\, K_k(xy)\, dx\, dy \right| = 0. \qquad (i, k = 0, 1, 2, \dots n)$$

D'altra parte si vede subito che si ha

$$\int_a^b \int_a^b K_i(xy)\, K_k(xy)\, dx\, dy = \int_a^b K_{i+k}(xx)\, dx \qquad (i, k = 0, 1, \dots);$$

cioè, posto per un momento $c_0 = m$,

$$\int_a^b \int_a^b K_i(xy)\, K_k(xy)\, dx\, dy = c_{i+k}. \qquad (i, k = 0, 1, \dots)$$

Servendosi della formola ora scritta, si vede immediatamente che le condizioni (A), (B), (Γ) coincidono rispettivamente colle (α), (β), (γ). Resta così dimostrato che le condizioni enunciate sono necessarie.

Per dimostrare che tali condizioni sono anche sufficienti, cominceremo dall'osservare che se è

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{n+2} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+2} \end{vmatrix} = 0,$$

necessariamente le funzioni

$$K_1(xy), K_2(xy), \dots K_n(xy), K_{n+1}(xy),$$

nessuna delle quali, come abbiamo già osservato, può essere identicamente nulla, risulteranno legate in tutto il campo S da una relazione lineare

$$a_n K_1 + a_{n-1} K_2 + \dots + a_1 K_n + a_0 K_{n+1} = 0.$$

Di qui segue subito che qualunque sia il numero intero e positivo r avremo in tutto il campo S

$$a_n K_r + a_{n-1} K_{r+1} + \dots + a_1 K_{n+r-1} + a_0 K_{n+r} = 0,$$

ed anche, indicando con λ un parametro arbitrario,

$$a_n \lambda^r K_r + \frac{1}{\lambda} a_{n-1} \lambda^{r+1} K_{r+1} + \dots + \frac{1}{\lambda^{n-1}} a_1 \lambda^{n+r-1} K_{n+r-1} + \frac{1}{\lambda^n} a_0 \lambda^{n+r} K_{n+r} = 0.$$

Avremo dunque, per gli stessi valori di x ed y,

$$a_n \sum_1^r{}_i \lambda^i \mathrm{K}_i + \frac{1}{\lambda} a_{n-1} \left\{ \sum_1^{r+1}{}_i \lambda^i \mathrm{K}_i - \lambda \mathrm{K}_1 \right\} + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{n-1}} a_1 \left\{ \sum_1^{r+n-1}{}_i \lambda_i \mathrm{K}_i - \lambda \mathrm{K}_1 - \cdots - \lambda^{n-1} \mathrm{K}_{n-1} \right\} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda^n} a_0 \left\{ \sum_1^{r+n}{}_i \lambda_i \mathrm{K}_i - \lambda \mathrm{K}_1 - \cdots - \lambda^n \mathrm{K}_n \right\} = 0 .$$

Ne segue che se indichiamo, secondo il solito, con $\Gamma(xy\lambda)$ il nucleo risolvente dell'equazione integrale (1), sarà, per una ben nota formola di Hilbert,

$$a_n \Gamma(xy\lambda) + \frac{1}{\lambda} a_{n-1} \{ \Gamma(xy\lambda) - \lambda \mathrm{K}_1 \} + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{n-1}} a_1 \{ \Gamma(xy\lambda) - \lambda \mathrm{K}_1 - \cdots - \lambda^{n-1} \mathrm{K}_{n-1} \} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda^n} a_0 \{ \Gamma(xy\lambda) - \lambda \mathrm{K}_1 - \cdots - \lambda^n \mathrm{K}_n \} = 0 :$$

cioè

$$\Gamma(xy\lambda) = \frac{\lambda \mathrm{K}_1 (a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda^{n-1} a_{n-1}) + \cdots + \lambda^{n-1} \mathrm{K}_{n-1} (a_0 + a_1 \lambda) + a_0 \lambda^n \mathrm{K}_n}{a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda^n a_n} .$$

Resta così posto in evidenza che i valori di λ (valori eccezionali) pei quali $\Gamma(xy\lambda)$ diviene infinito, non possono essere più di n. D'altra parte, se è soddisfatta la condizione (α), il loro numero non può essere inferiore ad n, perchè, in tal caso, le funzioni

$$\mathrm{K}_1(xy) , \mathrm{K}_2(xy) , \ldots , \mathrm{K}_n(xy)$$

nel campo S risulterebbero legate linearmente, e non potrebbe essere soddisfatta la condizione in questione.

Tal numero sarà dunque precisamente $= n$. D'altra parte, da quanto precedentemente abbiamo visto, risulta che se il numero dei valori eccezionali del nucleo simmetrico elementare $\mathrm{K}(xy)$ dell'equazione integrale (1) è $= n$, il numero X delle sue funzioni eccezionali linearmente indipendenti risulterà determinato dall'equazione di 1° grado:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X} & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} = 0 .$$

Se dunque la funzione $\mathrm{K}(xy)$, oltre che alle condizioni (α) (β), soddisfarà anche alla condizione (γ), certamente sarà $\mathrm{X} = m$ ed essa sarà rappresentabile in tutto il campo S nella forma (I). Resta così dimostrato che le condizioni enunciate sono anche sufficienti.