ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Fisica matematica. — *Sulle vibrazioni luminose di un mezzo cristallino uniassico dovute alla presenza di un unico centro luminoso.* Nota di A. SIGNORINI, pres. dal Socio MAGGI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul problema di Dirichlet per la più generale equazione lineare ellittica autoaggiunta alle derivate parziali del second'ordine.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nella mia Nota recante il titolo: *Un teorema sulle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche autoaggiunte alle derivate parziali del secondo ordine*, apparsa nell'ultimo fascicolo di questi Rendiconti, ho dato un teorema di confronto per le equazioni lineari ellittiche autoaggiunte alle derivate parziali del second'ordine, che è perfettamente l'analogo del classico teorema di confronto di Sturm per le equazioni lineari differenziali ordinarie del second'ordine. Mi permetto ora di osservare, secondo quanto ho annunziato al n. 1 della Nota indicata, alcune notevoli immediate conseguenze del detto teorema di confronto, concernenti la determinabilità dell'integrale di una equazione lineare ellittica autoaggiunta alle derivate parziali del second'ordine, mediante i valori dell'integrale assegnati lungo un contorno chiuso limitante un campo connesso.

Citerò colla notazione (N) la menzionata mia Nota.

2. Consideriamo la più generale equazione ellittica autoaggiunta del second'ordine:

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\theta(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+t(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{t(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\tau(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}+ \\ +A(x,y)\,u=0\,,$$

per la quale $\theta\,,\ \frac{\partial\theta}{\partial x}\,,\ \tau\,,\ \frac{\partial\tau}{\partial y}\,,\ t\,,\ \frac{\partial t}{\partial x}\,,\ \frac{\partial t}{\partial y}$ sono funzioni finite e continue in un campo C *nel quale supponiamo* (come sempre possiamo) θ (e quindi τ) *maggiore di una quantità positiva.*

Diciamo M il massimo di $A(x,y)$ in C. Se è $M \leq 0$, assegnato in C un qualunque contorno chiuso γ (della specie ordinariamente considerata nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche) si sa che esiste ed è unico l'integrale della (1) assoggettato a prendere su γ valori prescritti ([1]).

Domandiamo ora, se è $M > 0$, per quali contorni γ in C si può, considerando soltanto la determinabilità dell'integrale, asserire la medesima cosa? o, il che fa lo stesso, per qvali contorni γ in C non esiste che la soluzione $u \equiv 0$ nulla su di esso?

La questione, che ci proponiamo, ammette infinite soluzioni. Una soluzione che subito si presenta si ha affermando:

Se p designa quel numero positivo (certamente esistente e ben determinato) per il quale è in C

$$\theta(x\,,y) \geq p \quad , \quad \{\theta(x\,,y) - p\}\{\tau(x\,,y) - p\} - t^2(x\,,y) \geq 0\,,$$

per ogni contorno γ intieramente contenuto in una striscia di C *di larghezza minore di* $\pi\sqrt{\frac{p}{M}}$, *una soluzione della* (1) *nulla su γ è identicamente nulla* ([2]).

Difatti, ammessa l'esistenza di una soluzione della (1) nulla su un contorno γ di tal fatta e non identicamente nulla, dal confronto della (1) coll'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Mu = 0 \tag{2}$$

si deduce, secondo il teorema al n. 2 di (N), che una qualunque soluzione della (2) si annulla *nell'interno* di una striscia di larghezza eguale a $\pi\sqrt{\frac{p}{M}}$.

([1]) Nella nota 3 di (N) ho infatti osservato come, nel caso $M \leq 0$, non possa esistere che un solo integrale della (1) assoggettato a prendere su un contorno γ in C valori assegnati, ora l'equazione (1), supposta una certa derivabilità nei coefficienti, appartiene a quella classe di equazioni nella quale, sotto certe ipotesi pel contorno su cui sono dati i valori dell'integrale, i teoremi di esistenza e di unicità valgono sempre insieme. Cfr. E. E. Levi, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*. Memorie della Società italiana delle Scienze, serie 3ª, tomo XVI.

([2]) Cfr. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, pag. 25 e seg. Ivi è stabilito, per via affatto diversa, un risultato analogo a quello ora enunciato nel testo, ma di diverso significato. Si potrà paragonare il nostro risultato con quello di Picard nel solo caso che sia $\theta = \tau$, $t = 0$, ed esistano le derivate $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$. Fatte queste ipotesi il numero da noi indicato con $\frac{M}{p}$ coinciderà con quello dal Picard indicato con m^2, nel solo caso che le funzioni

$$\frac{A}{\theta} \quad \text{o} \quad \frac{A}{\theta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \log\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log\theta}{\partial y^2}\right),$$

abbiano in C lo stesso massimo. Cfr. anche Lichtenstein, *Zur Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVIII, pag. 302 e seg. Quivi trovansi altre utili note bibliografiche.

Questa conclusione è assurda, poichè, se

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + a = 0$$

è l'equazione di una delle rette limitanti la striscia, l'equazione dell'altra sarà

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + a + p \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{M}}} = 0 ,$$

e la soluzione della (2):

$$u = \operatorname{sen} \left\{ \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{p}} (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + a) \right\} ,$$

nulla sulle due rette, non è mai nulla nell'interno della striscia [1].

3. Ma, sempre mediante il confronto dell'equazione (1) coll'equazione (2), si può rispondere in infiniti altri modi alla questione proposta. Basterà determinare dei campi Γ di C pei quali si possa assicurare l'esistenza di un integrale della (2) che ivi non si annulli mai; si potrà allora dire che una soluzione della (1) nulla su un contorno γ tutto contenuto in un campo Γ è identicamente nulla.

Un altro campo Γ, non sempre contenuto in una striscia di larghezza minore di $\pi \sqrt{\frac{p}{\mathrm{M}}}$, che subito si presenta è un qualunque quadrato di C di lato minore di $\pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{p}{\mathrm{M}}}$. Infatti la soluzione della (2):

$$u = \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{2p}} \{ (x-a) \cos \alpha - (y-b) \operatorname{sen} \alpha \} \right) \times \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{2p}} \{ (x-a) \operatorname{sen} \alpha + (y-b) \cos \alpha \} \right) ,$$

dove α, a, b significano costanti arbitrarie, è nulla sul contorno, e non mai nulla nell'interno, del quadrato limitato dalle rette

$$(x-a) \cos \alpha - (y-b) \operatorname{sen} \alpha = 0 ,$$

$$(x-a) \cos \alpha - (y-b) \operatorname{sen} \alpha = \pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{p}{\mathrm{M}}} ,$$

$$(x-a) \operatorname{sen} \alpha + (y-b) \cos \alpha = 0 ,$$

$$(x-a) \operatorname{sen} \alpha + (y-b) \cos \alpha = \pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{p}{\mathrm{M}}} ,$$

[1] La proprietà osservata nella nota 3 di (N) risulta anche dal confronto delle due equazioni (1) e (2) del testo, poichè se è $\mathrm{M} \leq 0$, esiste una soluzione della (2) che non è mai nulla, essa è

$$e^{\sqrt{-\frac{\mathrm{M}}{p}}} .$$

che è appunto (per l'arbitrarietà delle α, a, b) un qualunque quadrato di lato $\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{p}{M}}$. Possiamo dunque dire:

Una solusione delle (1) *nulla su un contorno* γ *tutto interno ad un quadrato di lato* $\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{p}{M}}$ *è identicamente nulla.*

4. Per determinare nuovi campi Γ nei quali si possa assicurare l'esistenza di una soluzione della (2) non mai nulla, operiamo il cambiamento di variabili espresso da

$$x = x(\xi, \eta) \quad , \quad y = y(\xi, \eta), \tag{3}$$

supponendo che i punti singolari della trasformazione, cioè i punti in cui si annulla

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$$

siano fuori del campo C. Col cambiamento di variabili (3) si abbia

$$dx^2 + dy^2 = e\,d\xi^2 + 2f\,d\xi\,d\eta + g\,d\eta^2 ,$$

sarà

$$eg - f^2 = \left\{\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\right\}^2$$

e quindi in C

$$e > 0 \, , g > 0 \quad , \quad eg - f^2 > 0 .$$

Nelle variabili ξ e η l'equazione (2) si scrive:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{g\frac{\partial u}{\partial\xi} - f\frac{\partial u}{\partial\eta}}{\sqrt{eg - f^2}} + \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{e\frac{\partial u}{\partial\eta} - f\frac{\partial u}{\partial\xi}}{\sqrt{eg - f^2}} + \frac{M}{p}\sqrt{eg - f^2}\,u = 0 . \tag{4}$$

Quando l'equazione (4) potrà essere soddisfatta da una funzione u dipendente dalla sola ξ? Occorrerà perciò che per mezzo di una funzione $X(\xi)$ della sola ξ sia possibile soddisfare all'equazione

$$\frac{d^2X}{d\xi^2} + \frac{\sqrt{eg - f^2}}{g}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{g}{\sqrt{eg - f^2}} - \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{f}{\sqrt{eg - f^2}}\right)\frac{dX}{d\xi} + \\ + \frac{M}{p}\frac{eg - f^2}{g}X = 0 , \tag{5}$$

per la qual cosa basterà ammettere, come appunto intendiamo di fare, che si abbia

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{eg-f^2}}{g}\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}\dfrac{g}{\sqrt{eg-f^2}}-\dfrac{\partial}{\partial\eta}\dfrac{f}{\sqrt{eg-f^2}}\right)=a_1(\xi), \\[2ex] \dfrac{eg-f^2}{g}=a_2(\xi), \end{cases}$$

$a_1(\xi)$ e $a_2(\xi)$ indicando due funzioni della sola ξ. Ammettiamo dunque che il cambiamento di variabili (3) sia tale che risultino verificate le (6). Le (6) saranno verificate per tutti quei sistemi di coordinate ortogonali ξ, η pei quali e risulterà funzione della sola ξ, e g il prodotto di una funzione della sola ξ per una funzione della sola η. A tali sistemi di coordinate nel piano appartiene il sistema di coordinate polari (coll'origine fuori del campo C). L'equazione (5) può scriversi

$$(7)\qquad \frac{d}{d\xi}\left\{e^{\int a_1(\xi)\,d\xi}\frac{dX}{d\xi}\right\}+\frac{M}{p}\,a_2(\xi)\,e^{\int a_1(\xi)\,d\xi}\,X=0,$$

diciamo N il massimo in C di $a_2(\xi)\,e^{\int a_1(\xi)\,d\xi}$ e q il minimo di $e^{\int a_1(\xi)\,d\xi}$, è noto che, dicendo (α,β) il tratto dell'asse ξ in cui è contenuto ξ pei punti di C, per ogni segmento, del tratto (α,β) dell'asse ξ, di ampiezza δ minore di

$$\Delta=\pi\sqrt{\frac{p}{M}}\sqrt{\frac{q}{N}},$$

esiste una soluzione della (7) che ivi non s'annulla mai. Se dunque consideriamo nel piano x, y la regione di C limitata dalle due curve

$$\xi(x,y)=c\quad,\quad \xi(x,y)=c+\delta,$$

c indicando una qualunque costante di (α,β), essa è un campo Γ. Possiamo cioè dire:

Una soluzione della (1) *nulla sopra un contorno* γ *limitante un campo tutto contenuto in una regione di* C *limitata dalle due curve*

$$\xi(x,y)=c\quad,\quad \xi(x,y)=c+\delta,$$

è identicamente nulla.

5. Consideriamo, in particolare, il caso che le coordinate ξ e η siano coordinate polari e sia $\xi=\varrho$, $\eta=\theta$. L'equazione (5) coinciderà allora con l'equazione

$$(8)\qquad \frac{d^2X}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dX}{d\varrho}+\frac{M}{p}X=0,$$

a cui soddisfa la funzione di Bessel d'ordine zero in $\sqrt{\dfrac{M}{p}}\,\varrho$. Il punto singolare del cambiamento di variabili

$$x = \varrho \cos \theta \quad , \quad y = \varrho \operatorname{sen} \theta$$

è rappresentato da $\varrho = 0$, dovremo perciò supporre il campo C tutto esterno ad un certo cerchio di centro nell'origine e di raggio r. Sia d'altra parte $r + h$ il raggio del cerchio di centro nell'origine che contiene nel suo interno il campo C, i numeri q e N saranno rispettivamente r e $r + h$. Ne seguirà che in una corona circolare di C di larghezza δ minore di

$$\Delta = \pi \sqrt{\frac{p}{M}} \sqrt{\frac{r}{r+h}},$$

nella quale il raggio minore non è inferiore a r e il maggiore non superiore a $r + h$, esiste una soluzione della (2) non mai nulla.

Si vede che, per un fissato ma arbitrario valore di h, al crescere di r all'infinito, il limite superiore Δ della larghezza delle considerate corone circolari tende a $\pi \sqrt{\frac{p}{M}}$, cioè (n. 2) al limite superiore della larghezza delle striscie godenti della medesima loro proprietà.

Un valore di Δ, indipendente dalla quantità h, che crediamo utile rilevare, è quello che segue dalla considerazione degli zeri di $\sqrt{\varrho}\, Y(\varrho)$ per $\varrho \geq r$, $Y(\varrho)$ indicando un qualunque integrale dell'equazione

$$Y''(\varrho) + \frac{Y'(\varrho)}{\varrho} + Y(\varrho) = 0. \tag{9}$$

Si ha per $\sqrt{\varrho}\, Y(\varrho)$ l'equazione

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{\sqrt{\varrho}\, Y(\varrho)\right\} + \left(1 + \frac{1}{4\varrho^2}\right)\sqrt{\varrho}\, Y(\varrho) = 0, \tag{10}$$

per cui, per l'ordinario teorema di confronto di Sturm, si può affermare (com'è noto) che in ogni intervallo dell'asse positivo ϱ di ampiezza π cade una radice almeno di $\sqrt{\varrho}\, Y(\varrho)$ e che, per $\varrho \geq r$, per ogni intervallo di ampiezza minore di

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{4r^2}}},$$

esiste una soluzione della (10), e quindi della (9), ivi non mai nulla.

Ne segue, qualunque sia il numero positivo r, che per ogni intervallo dell'asse ϱ, a destra di r, di ampiezza δ minore di

$$\Delta = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{4r^2}}} \sqrt{\frac{p}{M}},$$

esiste una soluzione della (8) ivi non mai nulla, e quindi:

Per ogni contorno γ limitante un campo intieramente contenuto in una corona circolare di C avente il raggio minore non inferiore a r, e di larghezza δ inferiore a

$$\Delta = \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{4r^2}}}\sqrt{\frac{p}{M}},$$

una soluzione della (1) *nulla su di esso è identicamente nulla.*

Per cui, per esempio, i valori di un integrale della (1) assegnati su due contorni γ e γ' limitanti un campo semplicemente connesso tutto contenuto in una corona circolare di raggio minore $\geqq r$, e di larghezza $\leqq \delta$, determinano sempre perfettamente l'integrale, ecc.

Considerando poi che è $J(0) = 1$, $J(x)$ designando la funzione di Bessel d'ordine zero, e che le radici di $J(x)$, più piccole in valore assoluto, sono α e $-\alpha$ con $\alpha = 2{,}4048 \ldots$ [1], si può dire:

Una soluzione della (1) *nulla su un contorno contenuto intieramente in un cerchio di raggio*

$$2{,}4048\sqrt{\frac{p}{M}}$$

è identicamente nulla.

Questo risultato non rientra in nessuno di quelli dati precedentemente, poichè un cerchio del raggio anzidetto non è contenuto in una striscia di larghezza minore di $\pi\sqrt{\frac{p}{M}}$, nè in un quadrato di lato minore di $\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{p}{M}}$, ecc.

6. Osserviamo che infinite altre risposte alla questione proposta al n. 2 si potrebbero trovare confrontando l'equazione (1) con un'equazione che sia con essa nelle medesime relazioni in cui la (2) di (N) è colla (1) di (N) e che possegga un integrale per il quale si possono determinare i campi in cui si mantiene diverso da zero: *per ciascuno di questi campi varrà il teorema d'unicità relativo agli integrali della* (1) *che prendono valori prescritti su un contorno limitante una regione in esso intieramente contenuta.*

7. È ovvio che i teoremi stabiliti in questa e nella precedente Nota si estendono subito alle equazioni ellittiche autoaggiunte del second'ordine in un numero qualunque di variabili:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Au = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}), \tag{11}$$

[1] Secondo la tavola di Hansen.

poichè il processo adottato al n. 2 di (N) vale inalterato per dimostrare il teorema:

Se le forme quadratiche

$$\sum_{i,k} a_{ik} X_i X_k \;, \quad \sum_{i,k} b_{ik} X_i X_k \qquad (a_{ik} = a_{ki} \,,\, b_{ik} = b_{ki}),$$

sono entrambe definite positive per qualunque sistema di valori delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ *in un campo connesso e finito* C *di contorno* c, *mentre pei medesimi sistemi di valori delle variabili la forma*

$$\sum_{i,k} (a_{ik} - b_{ik}) X_i X_k$$

è definita o semidefinita positiva ed è

$$B \geq A ,$$

se esiste una soluzione u *della* (11) *identicamente nulla su* c, *non potrà esistere una soluzione* v *della*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Bu = 0 ,$$

per la quale il rapporto $\frac{u}{v}$ *non sia costante in* C *e ivi si conservi finito.*

Meccanica. — *Sul moto traslatorio d'un solido di rivoluzione in un liquido viscoso.* Nota di E. Zondadari, presentata dal Socio V. Volterra.

È noto che le equazioni generali del moto di un liquido viscoso sono

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu\Delta^2 u \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu\Delta^2 v \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu\Delta^2 w \end{cases}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

Se però supponiamo il moto *lento*, cioè se le componenti di velocità u, v, w e le loro derivate rispetto alle coordinate sono così piccole da po-