ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

poichè il processo adottato al n. 2 di (N) vale inalterato per dimostrare il teorema:

Se le forme quadratiche

$$\sum_{i,k} a_{ik}\, X_i\, X_k \;, \quad \sum_{i,k} b_{ik}\, X_i\, X_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}\;,\; b_{ik} = b_{ki}),$$

sono entrambe definite positive per qualunque sistema di valori delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ in un campo connesso e finito C *di contorno* c, *mentre pei medesimi sistemi di valori delle variabili la forma*

$$\sum_{i,k} (a_{ik} - b_{ik})\, X_i\, X_k$$

è definita o semidefinita positiva ed è

$$B \geq A\,,$$

se esiste una soluzione u della (11) *identicamente nulla su c, non potrà esistere una soluzione v della*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \mathrm{B}u = 0\,,$$

per la quale il rapporto $\frac{u}{v}$ non sia costante in C *e ivi si conservi finito.*

Meccanica. — *Sul moto traslatorio d'un solido di rivoluzione in un liquido viscoso.* Nota di E. Zondadari, presentata dal Socio V. Volterra.

È noto che le equazioni generali del moto di un liquido viscoso sono

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{U} - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu\Delta^2 u \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{U} - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu\Delta^2 v \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{U} - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu\Delta^2 w \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,.$$

Se però supponiamo il moto *lento*, cioè se le componenti di velocità u, v, w e le loro derivate rispetto alle coordinate sono così piccole da potersi trascurare i prodotti delle une per le altre, le (1) divengono

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{U} - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu \Delta^2 u \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{U} - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu \Delta^2 v \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{U} - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu \Delta^2 w. \end{cases}$$

Vogliamo ora studiare [1] il moto indotto in un liquido viscoso indefinito dal movimento traslatorio di un solido di rivoluzione qualunque, dotato di velocità $\mathrm{V}(t)$ nella direzione del proprio asse di rivoluzione. Supponiamo la velocità $\mathrm{V}(t)$ tale che il moto indotto nel liquido abbia il carattere di moto lento. Le (3) sono riferite ad assi fissi; ma è facile riconoscere che esse conservano la stessa forma anche se le intendiamo riferite ad assi mobili paralleli ai fissi e legati invariabilmente al solido di rivoluzione che chiameremo ancora $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$; se scegliamo infatti l'asse di rivoluzione come asse $\mathrm{O}z$ e immaginiamo insieme alla terna d'assi mobili $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$ una terna d'assi fissi coll'origine sopra $\mathrm{O}z$ e paralleli ad $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$ rispettivamente, abbiamo, indicando con ζ la distanza variabile dell'origine mobile O dall'origine degli assi fissi,

$$w = f(x\,, y\,, z + \zeta\,, t)$$

e quindi

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\mathrm{V}(t)\,;$$

ma l'ultimo termine deve trascurarsi per l'approssimazione considerata nell'ipotesi del moto lento e perciò appunto si può scrivere

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}\,;$$

le equazioni (3) conservano dunque la stessa forma sia riferite agli assi fissi che agli assi mobili.

Ciò premesso, se trasformiamo le (3) in coordinate cilindriche r, φ, z si ottiene (Basset, *Treatise on Hydrodynamics*, vol. II)

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{U} - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu\left(\Delta^2 \mathrm{R} - \dfrac{\mathrm{R}}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\mathrm{U} - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu\left(\Delta^2 \Phi - \dfrac{\Phi}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varphi}\right) \\ \dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{U} - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu \Delta^2 \mathrm{Z}, \end{cases}$$

[1] Espongo in questa Nota, i resultati ottenuti nelle ricerche che formano la prima parte della mia Tesi di Laurea (Roma, ottobre 1909). Sullo stesso argomento è comparsa recentemente nel tomo XXXVIII del « Bulletin de la Société Mathématique de France », una Nota del prof. L. Zoretti, nella quale però possono rilevarsi alcuni errori di stampa.

in cui R, Φ, Z sono le componenti di velocita secondo gli assi curvilinei in un punto.

Supponiamo ora che il moto del liquido avvenga sempre in piani passanti per l'asse Oz e sia lo stesso in tutti i piani. Allora essendo $\Phi = 0$ e le altre quantità che figurano nelle (4) indipendenti da φ, le (4) stesse divengono

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(U - \frac{p}{\varrho}\right) + \nu\left(\Delta^2 R - \frac{R}{r^2}\right) \\ \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(U - \frac{p}{\varrho}\right) + \nu \Delta^2 Z, \end{aligned}\right.$$

ove

$$(6)\qquad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

alle (5) si deve aggiungere la

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial r}(rR) + \frac{\partial}{\partial z}(rZ) = 0$$

ottenuta dalla (2), nell' ipotesi della simmetria rispetto ad Oz.

Delle tre componenti della rotazione di una particella liquida espresse in coordinate cilindriche da

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\Phi)}{\partial z}\right) \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r}\right) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial (r\Phi)}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial \varphi}\right), \end{aligned}\right.$$

ω_1 e ω_3 si annullano nel nostro caso; rimane solo ω_2 che chiameremo semplicemente Ω e potremo scrivere

$$(8)\qquad \Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r}\right).$$

Dalle (5) eliminando $U - \frac{p}{\varrho}$ si ottiene

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r}\right) = \nu\left(\frac{\partial}{\partial z}\Delta^2 R - \frac{\partial}{\partial r}\Delta^2 Z - \frac{1}{r^2}\frac{\partial R}{\partial z}\right);$$

ma per la (6)

$$\frac{\partial}{\partial z}\Delta^2 R = \Delta^2\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Delta^2 Z = \Delta^2\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial Z}{\partial r},$$

e poichè

$$\Delta^2\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)-\Delta^2\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)=\Delta^2\left(\frac{\partial R}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial r}\right)$$

la (9) diviene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial r}\right)=\nu\left\{\Delta^2\left(\frac{\partial R}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial R}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial r}\right)\right\},$$

cioè, per la (8)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}=\nu\left(\Delta^2\Omega-\frac{\Omega}{r^2}\right), \tag{10}$$

equazione a cui deve soddisfare la rotazione Ω.

All'equazione (7) si soddisfa identicamente, com'è noto, ponendo

$$R=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\quad,\quad Z=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{11}$$

Se sostituiamo questi valori di R e Z nella (8) si ha

$$\Omega=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right); \tag{12}$$

sostituendo inoltre nelle (5) i valori di R e Z dati dalle (11) ed eliminando fra le (5) stesse la quantità $U-\frac{p}{\varrho}$, oppure sostituendo il valore di Ω dato dalla (12) nella (10) si giunge all'equazione

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\,\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\,\partial t}&=\\ =\nu\Big(\frac{3}{r^4}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{3}{r^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}&+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial r\,\partial z^2}\\ -\frac{1}{r}\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}-\frac{2}{r}\frac{\partial^4\psi}{\partial r^2\,\partial z^2}&-\frac{1}{r}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4}\Big)\end{aligned}$$

alla quale deve soddisfare la ψ.

Le condizioni ai limiti si ottengono, supposto che il liquido aderisca completamente alla superficie del solido, esprimendo analiticamente il fatto che le particelle liquide a contatto della superficie del solido sono dotate della stessa velocità dei punti di essa. Supponendo, inoltre, che il solido sia tutto a distanza finita, si dovrà aggiungere la condizione che il liquido resti in quiete all'infinito.

Indicando dunque con σ la superficie del solido, con R_σ, Z_σ e R_∞, Z_∞ le componenti della velocità sulla superficie σ e all'infinito rispettivamente, si avranno le condizioni ai limiti

$$R_\sigma=0 \qquad Z_\sigma=V(t)$$
$$R_\infty=0 \qquad Z_\infty=0,$$

cioè

$$(13)\qquad \begin{cases} \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial s}\right]_\sigma = 0 & \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right]_\sigma = \mathrm{V}(t) \\ \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial s}\right]_\infty = 0 & \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right]_\infty = 0 \end{cases}$$

alle quali si deve aggiungere la condizione

$$[\psi]_{t=0} = \psi_0(r\,,s)$$

relativa allo stato iniziale, dove $\psi_0(r\,,s)$ è una funzione arbitraria nota, soddisfacente sopra σ e all'infinito alle stesse condizioni (13) a cui deve soddisfare la ψ.

Matematica. — *Sopra l'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* Nota del dott. G. C. Evans, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

Matematica. — *Sopra una nuova proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio.* Nota di M. Pannelli, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo.

Matematica. — *Sur les transformations de contact spéciales et le théorème de Jacobi.* Nota di Th. De Donder, presentata dal Socio V. Volterra.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Azione elettro-magnetica degli ioni dei metalli, deviati dalla traiettoria normale per effetto di un campo magnetico.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

Un disco circolare di bismuto B può essere percorso radialmente da una corrente continua; la quale penetra dal centro, per un filo f che lo traversa e vi è fissato con due piccoli dadi, e viene raccolta alla periferia da due anellini di rame $a\,,a'$ applicati all'orlo delle due facce del disco. Da uno degli anelli la corrente ritorna radialmente lungo una piastrina forata di rame parallela al disco, fino a un tubo t che s'innesta nel foro e circonda il filo centrale. Una bobina piatta CC con le spire parallele al disco, lo circonda tutto in giro ed è rilegata a un galvanometro.