ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

il miscuglio di alcool benzilico e glucosio. Da principio lo ottenemmo allo stato sciropposo, ma per successive purificazioni dall'etere acetico, esso si convertì molto lentamente in piccole rosette bianche.

La difficoltà di ottenere cristallino il benzilglucoside, anche se si fosse trovato presente nel suddetto estratto sciropposo, ci risultò da una esperienza diretta perchè aggiungendo ad una porzione dell'estratto acetonico primitivo circa 3 gr. di benzilglucoside non si riuscì a riaverlo cristallizzato.

Siamo ricorsi allora ad un processo di dialisi, che ci aveva già dato buoni risultati nel caso analogo della salicina, ma tanto dal liquido interno del dializzatore, come dall'esterno, non si ebbero, per estrazione con etere acetico che delle sostanze sciropposе. Ed altrettanto avvenne sperimentando con altri solventi, quali l'alcool amilico, il cloroformio, il solfuro di carbonio.

Malgrado questi insuccessi, date le proprietà del benzilglucoside e cioè la sua grande solubilità nell'alcool e nell'acqua e la difficoltà che presenta ad assumere forma cristallina, non ci sembra improbabile che la sostanza, la quale si era certamente formata nelle piante dall'alcool benzilico, scindibile in questo per idrolisi, possa essere un composto di natura glucosidica e forse anche il benzilglucoside descritto da E. Fischer.

Ci è grato infine di esprimere i nostri sentiti ringraziamenti al dottor Vincenzo Babini per l'efficace aiuto che ci prestò in queste esperienze.

Meccanica. — *Contributo allo studio delle tensioni elastiche.* Nota II di Umberto Crudeli, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

Segue la verifica degli integrali (4) [1].

Si ha, nell'interno dello spazio S,

$$\mathrm{T} = t_{11} + t_{22} + t_{33} = 3(k-1)\frac{d\frac{1}{r}}{dv} + \Delta^2 \cos\widehat{rv} = (3k-1)\frac{d\frac{1}{r}}{dv}$$

e, per esempio,

$$t_{11} = (k-1)\frac{d\frac{1}{r}}{dv} - \frac{k+1}{2}\frac{dr^2}{dv}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{d}{dv}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right),$$

talchè, osservando che

$$\Delta^2\left[\frac{dr^2}{dv}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\right] = 4\frac{d}{dv}\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\right),$$

[1] Questi Rendiconti, 19 febbraio 1911, pag. 207.

abbiamo, sostituendo nella $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\alpha\Delta^2 X_x=0$,

$$[3k-1-2(k+1)\,\alpha+2\alpha]\,\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\right)=0,$$

da cui appunto

$$\alpha=\frac{3k-1}{2k}.$$

Lo stesso risultato, evidentemente, si avrebbe considerando un'altra qualunque delle prime sei equazioni delle (2). Inoltre, formando, per esempio,

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}.$$

si ha

$$(k-1)\,\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)-(k+1)\,\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)+2\,\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)=0.$$

E lo stesso risultato si avrebbe, evidentemente, considerando un'altra qualunque delle prime tre equazioni delle (3).

Ciò posto, costruendo le componenti (secondo gli assi x, y, z) della tensione sul contorno σ, cioè costruendo la $t_x=t_{11}\cos nx+t_{12}\cos ny+$ $+\,t_{13}\cos nz$ e le due analoghe, che indicherò rispettivamente con t_y e t_z, ottengo

$$t_x=(k-1)\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\cos\widehat{nx}-(k+1)\,r\cos\widehat{r\nu}\,\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)+\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial\cos\widehat{r\nu}}{\partial x}\right)=$$

$$=(k-1)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{d\nu}\cos\widehat{nx}+(k+1)\,r\cos\widehat{r\nu}\,\frac{d}{dn}\left(\frac{x-\xi}{r^3}\right)+\frac{d}{dn}\left\{\frac{d}{d\nu}\left(\frac{x-\xi}{r}\right)\right\}=$$

$$=(k-1)\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\cos\widehat{nx}-(k+1)\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\cos\widehat{nx}+3(k+1)\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\cos\widehat{rx}\cos\widehat{r\nu}-$$

$$-\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\cos\widehat{\nu\xi}+\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\cos\widehat{nx}+(x-\xi)\,\frac{d}{dn}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\right)=$$

$$=3k\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\cos\widehat{rx}\cos\widehat{r\nu}-\left[\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\cos\widehat{nx}+\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\cos\widehat{\nu x}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos\widehat{n\nu}\right]\ (^1)$$

(1) Evidentemente, è indifferente scrivere $\cos\widehat{\nu\xi}$ oppure $\cos\widehat{\nu x}$, mentre $\cos\widehat{rx}=-$ $-\cos\widehat{r\xi}$ (essendo implicita la convenzione $\widehat{r\xi}=\widehat{\overline{r}x}$, dove r e $\overline{r}$ hanno la stessa direzione, ma senso opposto).

E, analogamente, si avrebbe

$$t_y = 3k \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \cos \widehat{ry} \cos \widehat{r\nu} - \left[\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} \cos \widehat{ny} + \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \cos \widehat{\nu y} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos \widehat{n\nu} \right]$$

$$t_z = 3k \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \cos \widehat{rz} \cos \widehat{r\nu} - \left[\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} \cos \widehat{nz} + \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \cos \widehat{\nu z} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos \widehat{n\nu} \right].$$

Talchè

$$P_n = t_x \cos nx + t_y \cos ny + t_z \cos nz =$$

$$= 3k \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \cos \widehat{rn} \cos \widehat{r\nu} - \left[\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} + 2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \cos \widehat{n\nu} \right].$$

Il termine $3k \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \cos \widehat{rn} \cos \widehat{r\nu} = -3k \cos \widehat{r\nu} \left(\frac{\cos \widehat{rn}}{r} \right)^2$ tende verso lo zero, allorchè il punto (x, y, z), mantenendosi sulla superficie σ tende verso il punto (ξ, η, ζ), mentre il termine

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} + 2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \cos \widehat{n\nu} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\cos \widehat{r\nu}}{r} + 2 \frac{\cos \widehat{rn}}{r} \cos \widehat{n\nu} \right)$$

diventa infinito del primo ordine rispetto alla $\frac{1}{r}$ [1]. Dunque P_n presenta sul contorno σ la singolarità annunziata.

Infine, indicando con P_ν la componente della suddetta tensione secondo la normale ν, si ha

$$P_\nu = -(1 + 3k \cos^2 \widehat{r\nu}) \frac{d\frac{1}{r}}{dn}$$

che pure diventa sulla σ, per $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, infinita del prime ordine rispetto alla $\frac{1}{r}$.

La P_n e la P_ν vengono, inoltre, come si vede, ad avere il carattere

[1] Ferme restando le restrizioni imposte alla σ, naturalmente.

d' invarianti rispetto a certe operazioni. Operazioni che risultano manifeste, ripensando al modo con cui la P_n e la P_ν medesime sono state ottenute.

3. Il sistema d' integrali (4) può ottenersi anche prendendo le mosse dai noti triplets elastici del prof. Somigliana:

$$(1)_{\mathrm{I}} \qquad u_x = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{k-1}{r} \quad , \quad u_y = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} \quad , \quad u_z = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}$$

$$(2)_{\mathrm{II}} \qquad v_x = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial x} \quad , \quad v_y = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \frac{k+1}{r} \quad , \quad v_z = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z}$$

$$(3)_{\mathrm{III}} \qquad w_x = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial x} \quad , \quad w_y = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial y} \quad , \quad w_z = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} - \frac{k+1}{r}$$

dove intenderemo che nella $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, ξ, η, ζ siano le coordinate di un punto fisso (arbitrario) del contorno σ ed x, y, z quelle di un punto generico dello spazio S.

Evidentemente, avremo ancora dei triplets elastici moltiplicando i tre suddetti rispettivamente per $\cos\widehat{\nu x}$, $\cos\widehat{\nu y}$, $\cos\widehat{\nu z}$, formando cioè

$$\begin{array}{lll} u_x \cos\widehat{\nu x} \; , & u_y \cos\widehat{\nu x} \; , & u_z \cos\widehat{\nu x} \\ v_x \cos\widehat{\nu y} \; , & v_y \cos\widehat{\nu y} \; , & v_z \cos\widehat{\nu y} \\ w_x \cos\widehat{\nu z} \; , & w_y \cos\widehat{\nu z} \; , & w_z \cos\widehat{\nu z} \, . \end{array}$$

E sarà un triplet elastico anche il seguente

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_x \cos\widehat{\nu x} + v_x \cos\widehat{\nu y} + w_x \cos\widehat{\nu z} \\ u_y \cos\widehat{\nu x} + v_y \cos\widehat{\nu y} + w_y \cos\widehat{\nu z} \\ u_z \cos\widehat{\nu x} + v_z \cos\widehat{\nu y} + w_z \cos\widehat{\nu z} \, . \end{array} \right.$$

Ora, calcolando le tensioni caratteristiche corrispondenti al sistema (5) si troverebbero agevolmente quelle da me costruite nella Nota precedente. Mi limiterò qui a riottenere le tensioni agenti sul contorno σ, le cui componenti, secondo gli assi x, y, z, sono state già indicate con t_x, t_y, t_z.

Se (L_x, L_y, L_z), (M_x, M_y, M_z), (N_x, N_y, N_z) sono rispettivamente i tre sistemi di tensioni, agenti sul contorno σ, relativi ai triplets del professore Somigliana (come sono stati scritti) si ha, come è noto,

$$\left\{\begin{aligned}
-\mathrm{L}_x &= 3k\cos^2\widehat{rx}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\\
-\mathrm{L}_y &= 3k\cos\widehat{rx}\cos\widehat{ry}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos\widehat{nx}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos\widehat{ny}\\
-\mathrm{L}_z &= 3k\cos\widehat{rx}\cos\widehat{rz}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos\widehat{nx}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos\widehat{nz}
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
-\mathrm{M}_x &= 3k\cos\widehat{ry}\cos\widehat{rx}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos\widehat{ny}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos\widehat{nx}\\
-\mathrm{M}_y &= 3k\cos^2\widehat{ry}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\\
-\mathrm{M}_z &= 3k\cos\widehat{ry}\cos\widehat{rz}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos\widehat{ny}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos\widehat{nz}
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
-\mathrm{N}_x &= 3k\cos\widehat{rz}\cos\widehat{rx}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos\widehat{nz}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos\widehat{nx}\\
-\mathrm{N}_y &= 3k\cos\widehat{rz}\cos\widehat{ry}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos\widehat{nz}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos\widehat{ny}\\
-\mathrm{N}_z &= 3k\cos^2\widehat{rz}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,.
\end{aligned}\right.$$

Talchè risulta (ricordando che $\cos\widehat{rx}=-\cos\widehat{r\xi}$)

$$t_x=\mathrm{L}_x\cos\widehat{\nu x}+\mathrm{M}_x\cos\widehat{\nu y}+\mathrm{N}_x\cos\widehat{\nu z}=$$

$$=3k\cos\widehat{rx}\cos\widehat{r\nu}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}-\left[\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\cos\widehat{\nu x}+\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\cos\widehat{nx}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos\widehat{n\nu}\right]$$

e le due analoghe. Si ottiene, cioè, sulla σ il sistema di tensioni da me già trovato.

Giova insistere sul fatto che la

$$\mathrm{P}_n = t_x \cos \widehat{nx} + t_y \cos \widehat{ny} + t_z \cos \widehat{nz},$$

e la

$$\mathrm{P}_\nu = t_x \cos \widehat{\nu x} + t_y \cos \widehat{\nu y} + t_z \cos \widehat{\nu z}$$

risultano indipendenti dal sistema d'assi costruttivo. E in ciò consiste principalmente l'importanza del nuovo sistema di tensioni. Al fine di rendere ancor più chiara tale osservazione, noterò, per es., che le tensioni agenti sulla σ corrispondentemente al triplet $(1)_{\mathrm{I}}$ del prof. Somigliana, forniscono, evidentemente, la seguente componente secondo la normale ν,

$$\mathrm{L}_x \cos \widehat{\nu x} + \mathrm{L}_y \cos \widehat{\nu y} + \mathrm{L}_z \cos \widehat{\nu z} =$$

$$= 3k \cos \widehat{rx} \cos \widehat{r\nu} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \cos \widehat{\nu x} + \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \cos \widehat{nx} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos \widehat{n\nu}$$

Ora, sempre intendendo che il punto (ξ, η, ζ) sia un punto fisso del contorno σ, e ν la normale a σ nel punto medesimo, la suddetta componente normale presenta, evidentemente, sulla σ una singolarità. Tale singolarità è di ordine superiore rispetto alla $\frac{1}{r}$, finchè l'asse delle x ha una direzione *generica* (¹). Ma, prendendo, come sistema di assi costruttivo, un sistema di assi in cui l'asse delle x coincida con ν, essa non è più tale.

Invece, nel sistema di tensioni da me costruito, la componente normale (sia rispetto alla ν che alla n) risulta indipendente dalla scelta del sistema di assi costruttivo.

4. Come applicazione del sistema di tensioni, che ho qui trovato, risolverò il seguente problema:

Costruire, nello spazio S, *un sistema di tensioni caratteristiche, corrispondentemente ad una assegnata dilatazione cubica* θ.

Come è ben noto, il problema dell'equilibrio elastico non è determinato quando sia assegnata soltanto la dilatazione cubica θ, ma si può chiedere appunto di costruire *un* sistema di tensioni, al quale corrisponda, nello spazio S finito (semplicemente connesso) occupato dal corpo, l'assegnata dilatazione cubica.

Se indichiamo con $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ una funzione finita e continua del punto (ξ, η, ζ) della superficie contorno σ, avremo che anche

$$(\mathrm{I})_{bis} \qquad \mu \int_\sigma \varphi t_{ih}(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\, d\sigma \qquad (i, h = 1, 2, 3)$$

(¹) Con tale parola s'intende implicitamente esclusa la direzione ν.

rappresenterà (1) un sistema di tensioni caratteristiche. Al quale corrisponde la dilatazione cubica

$$\theta = \frac{\mu}{3\lambda + 2\mu} \int_\sigma (t_{11} + t_{22} + t_{33}) \, \varphi \, d\sigma =$$

$$= \frac{\mu(3k-1)}{3\lambda + 2\mu} \int_\sigma \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dv} d\sigma = \int_\sigma \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dv} d\sigma .$$

Ora, tendendo col punto interno (x, y, z) verso un punto del contorno σ, si ha, al limite

$$(\mathrm{II})_{bis} \qquad 2\pi\varphi_0 + \int_\sigma \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dv} d\sigma = \theta_0 .$$

Intesa assegnata la θ_0 (e, perciò, la θ nell'interno di S, essendo ivi $\Delta^2\theta = 0$) si ha così la nota equazione integrale del problema interno del Dirichlet. E, determinata la φ, mediante la $(\mathrm{II})_{bis}$, avremo, sostituendo in $(\mathrm{I})_{bis}$, *un* sistema di tensioni caratteristiche corrispondente ad un'assegnata dilatazione cubica.

Matematica. — *Sur les transformations de contact spéciales et le théorème de Jacobi*. Nota di TH. DE DONDER, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. *Formule fondamentale* — La transformation

$$\begin{cases} x_i^\times = x_i^\times(x, y, t) \\ y_i^\times = y_i^\times(x, y, t) \end{cases} \qquad i = 1, \dots n$$

définit une transformation de contact spéciale, quand on a l'identité en $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$ et t:

$$(1) \qquad \sum_1^n {}_i \, y_i \, \delta x_i - \sum_1^n {}_i \, y_i^\times \, \delta x_i^\times = \delta \mathrm{U}(x, y, t)$$

où $\mathrm{U}(x, y, t)$ représente une fonction $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$ et t. On a posé $\delta t = 0$.

Exprimons les y et $y^\times$ en fonction des $x, x^\times, t$, et posons:

$$\mathrm{U}(x, y, t) = \mathrm{V}(x, x^\times, t) .$$

De (1), on déduira ainsi l'identité en $x, x^\times$ et t:

$$(1') \qquad \sum_1^n {}_i \, y_i \, \delta x_i - \sum_1^n {}_i \, y_i^\times \, \delta x_i^\times = \delta \mathrm{V}(x, x^\times, t) ;$$