ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell'8 gennaio 1911.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla definizione di funzione.* Nota del Corrispondente G. Peano.

I professori Whitehead e Russell dell'Università di Cambridge pubblicarono da pochi giorni il primo volume di un'opera col titolo *Principia mathematica*. È un grande libro, di quasi 700 pagine in 4°, edito col sussidio del governo inglese, e coll'aiuto dell'Università di Cambridge.

Le questioni relative ai principî della matematica, vi sono magistralmente ed esaurientemente trattate. Il libro è quasi tutto scritto in simboli di Logica matematica.

Gli Autori (pag. 2), cominciano coll'esporre le ragioni che li forzano all'uso dei simboli. Le idee di logica, che occorre adoperare, sono più astratte di quelle considerate nel linguaggio comune. La struttura grammaticale del linguaggio rende difficile l'analisi delle proposizioni. L'adattazione delle regole del simbolismo ai processi di deduzione aiuta l'intuizione.

Il simbolismo rende le proposizioni limpide e terse, e permette di riconoscerne le singole articolazioni. La completa enumerazione delle idee e dei passi di cui consta un ragionamento necessita l'uso dei simboli.

La necessità dei simboli, generalmente riconosciuta per l'aritmetica, l'algebra e il calcolo, è meno ammessa trattandosi di logica, compresa quella logica che occorre in matematica.

Gli Autori usano i simboli di logica matematica esposti nelle prime pagine del « Formulario mathematico », da me pubblicato (edizione 5ª, 1907-1909).

Li espongono però in altro ordine, vi aggiungono numerosi nuovi simboli, appropriati alle ricerche da essi intraprese, e ne costituiscono una vasta teoria.

Nel « Formulario mathematico », le teorie di logica sono ridotte al puro necessario per comprendere le loro applicazioni alla Matematica. Le difficoltà vi sono a preferenza evitate, anzichè superate. Quindi i nostri Autori, seguendo altra via, definiscono la *classe*, che nel Formul. è data come idea primitiva.

È forse utile il richiamare, che il linguaggio comune spesso ha più termini sinonimi per rappresentare la stessa idea. Così in matematica elementare, sono sinonimi le parole *addizionare, aggiungere, sommare*; e alcuni libri scolastici si illudono di definire l'uno di questi termini per esempio l'*addizione*, mediante l'*aggiungere*. Parimenti sono sinonimi, o differiscono solo per la forma grammaticale, i termini *classe, insieme, gruppo, aggregato, proprietà,* ecc.; il definire l'uno per l'altro, costituisce un circolo vizioso. Parimenti è un circolo vizioso la definizione di *funzione*, mediante i termini equivalenti *corrispondenza, relazione, operazione, successione,* ecc., ove questi termini non siano alla loro volta convenientemente definiti.

I nostri Autori dànno le definizioni simboliche di *relazione* e di *funzione*.

Essendo queste definizioni riuscite nel « Formulario mathematico », pp. 73-82, un po' oscure, causa la brevità, qui propongo di far vedere come, partendo dai simboli del Formulario si possa parimenti giungere alla definizione di relazione, quale classe di coppie.

Suppongo note: le lettere variabili $a, b, \ldots x, y, z$; la punteggiatura o parentesi, i segni $=$ (è uguale), $\supset$ (si deduce), ε (è un), $\ni$ (i quali), $\exists$ (esiste), $\cap$ (et, sottinteso), Cls (classe), Cls' (classe di).

Quali relazioni passino fra le idee espresse da questi segni, e quali si possano assumere come primitive, è discusso nel Formulario.

Ammetto inoltre l'idea di coppia degli enti x e y, che indico, seguendo il Formulario, col segno $x\,;y$. In matematica è indicata generalmente con (x, y), nella scrittura $f(x, y)$. Ma noi non possiamo usare le parentesi in un senso diverso dall'originale, che è quello di aggruppare le parti di una formula. Allora pongo:

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset.\, a \,\text{⁝}\, b = z \ni [\exists\, (x\,;y) \ni (x \,\varepsilon\, a \,.\, y \,\varepsilon\, b \,.\, z = x\,;y)] \qquad \text{Def.}$$

« Indicando con a e b due classi, allora col nuovo simbolo $a \,\text{⁝}\, b$, che si potrà leggere ad esempio *a con b*, intendiamo per definizione, ogni ente z tale che si possano determinare z e y in modo che x sia un elemento della classe a, e y un elemento della b, e z sia la coppia $x\,;y$ ».

Oppure in modo più conforme al linguaggio comune, $a \,\text{⁝}\, b$ è l'insieme di coppie formate da un elemento di a con un elemento di b.

Allora Cls' $(a \,\raisebox{0.5ex}{\scriptsize ⁝}\, b)$ rappresenta una relazione fra gli a e i b. Ad esempio, per schiarire le idee, se per classi a e b prendiamo la classe dei numeri reali, indicati nel Formulario con q, allora se $x, y \,\varepsilon\, \mathrm{q}$, $x; y$ è la coppia di numeri reali, o il punto del piano di coordinate x e y; q ⁝ q indica l'insieme dei punti del piano; Cls' (q ⁝ q) indica una figura qualunque nel piano, cioè una relazione fra le ascisse e le ordinate dei suoi punti.

Perciò potremo definire il simbolo « Relatio » introdotto dai nostri Autori:

$$\mathrm{Relatio} = u \ni \{ \exists\, (a; b) \ni [a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls'}(a ⁝ b)] \} \qquad \mathrm{Def.}$$

« Relazione è ogni ente u, che sia Cls' $(a ⁝ b)$, ove a e b sono classi che si possono determinare ».

$$u \,\varepsilon\, \mathrm{Relatio} \,.\, \supset .\; \mathrm{Dominio}\; u = x \ni [\exists\, y \ni (y ; x \,\varepsilon\, u)] \qquad \mathrm{Def.}$$

« Se u indica una relazione, per dominio della u, intendiamo l'insieme degli enti x, i quali, riuniti in coppia con convenienti elementi y, formano coppie di elementi di u ».

E così si possono seguire i nostri Autori nelle teorie successive.

Per gli autori che parlano di « functio polydroma », la parola *funzione* è equivalente a *relazione*. Ma ora in generale i cultori dell'Analisi attribuiscono alle funzioni la monodromia; cioè la funzione è una relazione speciale, che ad ogni valore della variabile fa corrispondere un sol valore. Si potrà definire in simboli:

$$\mathrm{Functio} = \mathrm{Relatio} \cap u \ni [y ; x \,\varepsilon\, u \,.\, z ; x \,\varepsilon\, u \,.\, \supset_{x,y,z} .\, y = z] \qquad \mathrm{Def.}$$

« *Funzione* è ogni relazione u tale che, se due coppie $y ; x$ e $z ; x$, aventi lo stesso secondo elemento, soddisfano alla relazione u, necessariamente segua, qualunque si siano x, y, z, che $y = z$ ».

E così, senz'altra difficoltà, si possono introdurre le ulteriori notazioni e formule dei nostri Autori.

Matematica. — *Alcune formule inedite di I. Weingarten con applicazioni*. Nota del Socio Luigi Bianchi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.