ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

rappresenterà (1) un sistema di tensioni caratteristiche. Al quale corrisponde la dilatazione cubica

$$\theta = \frac{\mu}{3\lambda + 2\mu} \int_\sigma (t_{11} + t_{22} + t_{33})\, \varphi\, d\sigma =$$

$$= \frac{\mu(3k-1)}{3\lambda + 2\mu} \int_\sigma \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\, d\sigma = \int_\sigma \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\, d\sigma\,.$$

Ora, tendendo col punto interno $(x\,,y\,,z)$ verso un punto del contorno σ, si ha, al limite

$$(\mathrm{II})_{bis} \qquad 2\pi\varphi_0 + \int_\sigma \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\, d\sigma = \theta_0\,.$$

Intesa assegnata la θ_0 (e, perciò, la θ nell'interno di S, essendo ivi $\Delta^2\theta = 0$) si ha così la nota equazione integrale del problema interno del Dirichlet. E, determinata la φ, mediante la $(\mathrm{II})_{bis}$, avremo, sostituendo in $(\mathrm{I})_{bis}$, *un* sistema di tensioni caratteristiche corrispondente ad un'assegnata dilatazione cubica.

Matematica. — *Sur les transformations de contact spéciales et le théorème de Jacobi*. Nota di TH. DE DONDER, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. *Formule fondamentale* — La transformation

$$\begin{cases} x_i^\times = x_i^\times(x\,,y\,,t) \\ y_i^\times = y_i^\times(x\,,y\,,t) \end{cases} \qquad i = 1\,,\dots n$$

définit une transformation de contact spéciale, quand on a l'identité en $x_1 \dots x_n\,,y_1 \dots y_n$ et t:

$$(1) \qquad \sum_1^n {}_i\, y_i\, \delta x_i - \sum_1^n {}_i\, y_i^\times\, \delta x_i^\times = \delta \mathrm{U}(x\,,y\,,t)$$

où $\mathrm{U}(x\,,y\,,t)$ représente une fonction $x_1 \dots x_n\,,y_1 \dots y_n$ et t. On a posé $\delta t = 0$.

Exprimons les y et $y^\times$ en fonction des $x\,,x^\times\,,t$, et posons:

$$\mathrm{U}(x\,,y\,,t) = \mathrm{V}(x\,,x^\times\,,t)\,.$$

De (1), on déduira ainsi l'identité en $x\,,x^\times$ et t:

$$(1') \qquad \sum_1^n {}_i\, y_i\, \delta x_i - \sum_1^n {}_i\, y_i^\times\, \delta x_i^\times = \delta \mathrm{V}(x\,,x^\times\,,t)\,;$$

d'où

$$(2)\qquad \begin{cases} y_i = \dfrac{\partial V(x, x^\times, t)}{\partial x_i} \\ y_i^\times = -\dfrac{\partial V(x, x^\times, t)}{\partial x_i^\times} \end{cases}.$$

Considérons maintenant les $2n$ équations différentielles quelconques:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = X_i(x, y, t) \\ \dfrac{dy_i}{dt} = Y_i(x, y, t) \end{cases} \qquad i = 1, \dots n.$$

et posons, en vertu de ces équations:

$$\frac{d}{dt} f(x, y, t) \equiv \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} + \sum_1^n {}_i \left(\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial y_i} Y_i \right),$$

où l'on a écrit X_i pour $X_i(x, y, t)$, et de même pour Y_i.

Prenons la dérivée $\dfrac{d}{dt}$ des deux membres de l'identité (1'); en remarquant que les opérations $\dfrac{d}{dt}$ et δ sont permutables et en utilisant (2), on obtient, après quelques calculs:

$$(4)\qquad \sum_1^n {}_i \left(\frac{dy_i}{dt} \delta x_i - \frac{dx_i}{dt} \delta y_i \right) = \sum_1^n {}_i \left(\frac{dy_i^\times}{dt} \delta x_i^\times - \frac{dx_i^\times}{dt} \delta y_i^\times \right) + \delta \frac{\partial V(x, x^\times, t)}{\partial t}.$$

C'est la *formule fondamentale*, que nous avions en vue. Elle fournira une identité en $x, x^\times, t$, si nous remplaçons $\dfrac{dx_i}{dt}$ par X_i, $\dfrac{dy_i}{dt}$ par Y_i, $\dfrac{dx_i^\times}{dt}$ par $\dfrac{\partial x_i^\times}{\partial t} + \sum_1^n {}_k \left(\dfrac{\partial x_i^\times}{\partial x_k} X_k + \dfrac{\partial x_i^\times}{\partial y_k} Y_k \right)$, de même pour les $\dfrac{dy_i^\times}{dt}$, et si enfin nous exprimons les y en fonction des $x, x^\times, t$, au moyen de (2).

Remarquons qu'en vertu de (1), on pourrait exprimer les x et y en fonction des $x^\times, y^\times, t$; posons alors:

$$V(x, x^\times, t) = W(x^\times, y^\times, t).$$

La formule fondamentale (4) devient, en utilisant (2):

$$(4')\qquad \sum_1^n {}_i \left(\frac{dy_i}{dt} \delta x_i - \frac{dx_i}{dt} \delta y_i \right) = \sum_1^n {}_i \left(\frac{dy_i^\times}{dt} \delta x_i^\times - \frac{dx_i^\times}{dt} \delta y_i^\times \right) + $$
$$+ \delta \left(\frac{\partial W(x^\times, y^\times, t)}{\partial t} - \sum_1^n {}_i\, y_i \frac{\partial x_i(x^\times, y^\times, t)}{\partial t} \right)$$

où $x_i(x^\times, y^\times, t)$ représente x_i exprimé en fonction des $x^\times, y^\times, t$.

2. *Equations canoniques de Hamilton.* — Considérons le système canonique

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}(x\,,y\,,t)}{\partial y_i} \\[2ex] \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}(x\,,y\,,t)}{\partial x_i} \end{cases} \qquad i=1\,,\dots n$$

et effectuons la transformation de contact spéciale des $x\,,y$ en $x^\times\,,y^\times$ définie par (1); si l'on pose, dans la formule fondamentale (4)

$$\mathcal{H}(x^\times\,,y^\times\,,t) \equiv \mathrm{H}(x\,,y\,,t) + \frac{\partial \mathrm{W}(x^\times\,,y^\times\,,t)}{\partial t} - \sum_1^n{}_i\, y_i \frac{\partial x_i(x^\times\,,y^\times\,,t)}{\partial t}$$

on trouvera immédiatement que

$$(5')\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i^\times}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}(x^\times\,,y^\times\,,t)}{\partial y_i^\times} \\[2ex] \dfrac{dy_i^\times}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}(x^\times\,,y^\times\,,t)}{\partial x_i^\times} \end{cases}$$

Les équations transformées sont encore canoniques; la fonction caractéristique est devenue $\mathcal{H}(x^\times\,,y^\times\,,t)$.

Supposons maintenant que $y_1^\times\,,\dots y_p^\times$ $(p \leq n)$ soient des *invariants* (en involution) du système canonique (5); on aura $\dfrac{dy_\lambda}{dt} = 0$, $(\lambda = 1\,,\dots p)$, d'où

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x^\times\,,y^\times\,,t)}{\partial x_\lambda^\times} = 0\,.$$

La nouvelle fonction caractéristique $\mathcal{H}(x^\times\,,y^\times\,,t)$ est donc indépendante de $x_1^\times\,,\dots x_p^\times$; d'autre part, les $y_1^\times\,,\dots y_p^\times$ pourront être remplacés par des constantes arbitraires. Il en résulte que le système (5') se réduit *a un système canonique de* $2n-2p$ *équations en* $x_{p+1}^\times \dots x_n^\times\,,y_{p+1}^\times \dots y_n^\times\,,t$ et d'un autre système de p équations en $x_1^\times\,,\dots x_p^\times\,,t$, qui s'intégrera ensuite au moyen de p quadratures.

On peut voir ce résultat, lorsque les invariants $y_\lambda^\times$ sont indépendants de t, dans une note récente de M. Burgatti [1].

[1] P. Burgatti, *Sulla trasformazione e sulla riduzione dei sistemi Hamiltoniani.* Rendiconti R. Acc. dei Lincei, Roma, vol. XIX, 1910, pag. 566. Les deux exemples indiqués par M. Burgatti, à la fin de sa Note, montrent suffisamment l'intérêt de cette propriété. M. Burgatti a donné une méthode pour trouver les transformations de contaet qui servent à la réduction des systèmes canoniques; cette méthode subsiste içi, sans modification.

3. *Théorème de Jacobi généralisé.* — Supposons que $V(x, x^\times, t)$ soit l'intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$H\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, t\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0;$$

les $x^\times$ jouent le rôle de n constantes arbitraires distinctes, et $H\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, t\right)$ repsésente le résultat obtenu en remplaçant, dans $H(x, y, t)$, les y_i par $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots n)$. Cette fonction $V(x, x^\times, t)$ définissant la transformation de contact (2), considérons la formule fondamentale (4), ainsi que les équations canoniques (5); nous avons l'identité en $x, x^\times, t$:

$$-\delta\left(H(x, y, t) + \frac{\partial V(x, x^\times, t)}{\partial t}\right) = \sum_1^n{}_i \left(\frac{dy_i^\times}{dt}\,\delta x_i^\times - \frac{dx_i^\times}{dt}\,\delta y_i^\times\right).$$

Mais $H(x, y, t)$ exprimé en fonction des $x, x^\times, t$ devient

$$H\left(x, \frac{\partial V(x, x^\times, t)}{\partial x}, t\right),$$

à cause de (2); il en résulte que, dans le premier membre de la relation précédente, l'expression entre parenthèses est identiquement nulle; d'où

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_i^\times}{dt} &= 0 \\ \frac{dy_i^\times}{dt} &= 0; \end{aligned}\right.$$

ce qui est le théorème (direct) de Jacobi [1]. Pour généraliser ce théorème, il suffira de supposer qu'on connaisse une fonction $V(x, x^\times, t)$, telle que $\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{\partial(x_1^\times \ldots x_n^\times)}$ soit différent de zéro et telle qu'on ait identiquement [2]

$$H\left(x, \frac{\partial V(x, x^\times, t)}{\partial x}, t\right) + \frac{\partial V(x, x^\times, t)}{\partial t} \equiv \psi\left(\frac{\partial V(x, x^\times, t)}{\partial x^\times}, t\right),$$

où ψ est une fonction quelconque; autrement dit, il suffira que le premier membre soit exprimable en fonction des $\frac{\partial V(x, x^\times, t)}{\partial x_i^\times}$ et de t. Il résulte immédiatement de ce qui précède que

$$-\delta\psi\left(\frac{\partial V(x, x^\times, t)}{\partial x^\times}, t\right) = \sum_1^n{}_i \left(\frac{dy_i^\times}{dt}\,\delta x_i^\times - \frac{dx_i^\times}{dt}\,dy_i^\times\right).$$

[1] On sait, et l'on verrait de même, que si le premier membre se réduisait à une fonction des $x^\times$ et de t, l'intégration du système (5) s'effectuerait au moyen de n quadratures.

[2] Le théorème réciproque de Jacobi pourrait se retrouver au moyen de la formule (4).

Retournons aux $2n$ variables $x^\times, y^\times$; d'où:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i^\times}{dt} = \dfrac{\partial\psi(y^\times, t)}{\partial y_i^\times} \\ \dfrac{dy_i^\times}{dt} = 0\,, \end{cases}$$

et l'*intégration du système canonique* (5) *se réduira à n quadratures*. En particulier, si l'on suppose que H est indépendant de t, et si l'on pose $\psi(y^\times, t) \equiv y_n^\times$, on retrouve un résultat dû à M. Burgatti (Note citée).

4. *Systèmes non-holonomes, systèmes perturbés.* — Les considérations précédentes s'étendent aisement à l'étude de certains systèmes non-holonomes, ainsi qu'aux équations canoniques qui se présentent dans celle des systèmes perturbés. On pourrait généraliser de cette manière certains résultats obtenus par MM. Appell et Dautheville [1] pour les premiers systèmes, et les théorèmes de Morera [2] et de M. Poincaré [3] concernant les systèmes perturbés.

Matematica. — *Sopra una nuova proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario.* Nota di M. Pannelli, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo.

Il noto teorema del Cremona [4]: « Se fra i punti di due piani ha « luogo una corrispondenza birazionale con soli punti fondamentali ordinarî, « il numero di questi punti è lo stesso per entrambi i piani », si può dimostrare seguendo due metodi differenti.

Un primo metodo, tenuto dal Cremona stesso, consiste nell'esprimere che i punti doppî del fascio di curve, che sopra uno dei piani dati corrisponde ad un fascio di rette dell'altro, debbono venir tutti assorbiti dai punti fondamentali di quel piano e dalle curve degeneri del fascio.

Un secondo metodo si ha calcolando in due maniere diverse il genere della Jacobiana della rete di curve, che sopra uno dei piani dati corrisponde alle rette dell'altro, e poi eguagliando i due risultati così ottenuti [5].

(1) S. Dautheville, *Sur les systèmes non-holonomes*. Bull. Soc. math. de France, t. XXXVII, 1909.

(2) G. Morera, *Sulle equazioni dinamiche di Hamilton*. Atti R. Accad. di Torino, vol. XXXIX, 1903-1904.

(3) H. Poincaré, *Sur une généralisation de la méthode de Jacobi*. Comptes rendus. Paris, 13 décembre 1909.

(4) *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*. Memorie dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, tomo V, serie 2ª.

(5) Per questo metodo veggasi la mia Nota: *Sopra una proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XIX, serie 5ª (1910).