ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Retournons aux $2n$ variables $x^\varkappa$, $y^\varkappa$; d'où:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i^\varkappa}{dt} = \dfrac{\partial\psi(y^\varkappa, t)}{\partial y_i^\varkappa} \\ \dfrac{dy_i^\varkappa}{dt} = 0, \end{cases}$$

et l'*intégration du système canonique* (5) *se réduira à n quadratures*. En particulier, si l'on suppose que H est indépendant de t, et si l'on pose $\psi(y^\varkappa, t) \equiv y_n^\varkappa$, on retrouve un résultat dû à M. Burgatti (Note citée).

4. *Systèmes non-holonomes, systèmes perturbés.* — Les considérations précédentes s'étendent aisement à l'étude de certains systèmes non-holonomes, ainsi qu'aux équations canoniques qui se présentent dans celle des systèmes perturbés. On pourrait généraliser de cette manière certains résultats obtenus par MM. Appell et Dautheville (1) pour les premiers systèmes, et les théorèmes de Morera (2) et de M. Poincaré (3) concernant les systèmes perturbés.

Matematica. — *Sopra una nuova proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario.* Nota di M. Pannelli, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo.

Il noto teorema del Cremona (4): « Se fra i punti di due piani ha « luogo una corrispondenza birazionale con soli punti fondamentali ordinarî, « il numero di questi punti è lo stesso per entrambi i piani », si può dimostrare seguendo due metodi differenti.

Un primo metodo, tenuto dal Cremona stesso, consiste nell'esprimere che i punti doppî del fascio di curve, che sopra uno dei piani dati corrisponde ad un fascio di rette dell'altro, debbono venir tutti assorbiti dai punti fondamentali di quel piano e dalle curve degeneri del fascio.

Un secondo metodo si ha calcolando in due maniere diverse il genere della Jacobiana della rete di curve, che sopra uno dei piani dati corrisponde alle rette dell'altro, e poi eguagliando i due risultati così ottenuti (5).

(1) S. Dautheville, *Sur les systèmes non-holonomes*. Bull. Soc. math. de France, t. XXXVII, 1909.

(2) G. Morera, *Sulle equazioni dinamiche di Hamilton*. Atti R. Accad. di Torino, vol. XXXIX, 1903-1904.

(3) H. Poincaré, *Sur une généralisation de la méthode de Jacobi*. Comptes rendus. Paris, 13 décembre 1909.

(4) *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*. Memorie dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, tomo V, serie 2ª.

(5) Per questo metodo veggasi la mia Nota: *Sopra una proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XIX, serie 5ª (1910).

Questi due metodi applicati alle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario, conducono a due relazioni distinte fra gli elementi fondamentali.

La relazione che nasce dal secondo metodo trovasi stabilita nella mia Nota dianzi citata; quella che si ricava col primo metodo costituisce l'oggetto della Nota presente. Ma la sua dimostrazione viene esposta sommariamente, alcuni sviluppi non potendo qui trovar posto, a causa della loro estensione.

1. Per applicare al piano il metodo del Cremona, è necessario conoscere la riduzione prodotta da un punto-base r^{uplo}, sul numero dei punti doppî di un fascio di curve. Quindi, volendo seguire il metodo analogo nello spazio, bisogna trovare la riduzione che sul numero dei punti doppî di un fascio di superficie producono gli elementi multipli della base del fascio stesso. Questa riduzione, sin qui nota soltanto in casi particolari [1], viene data dal teorema seguente, che sarà dimostrato in un altro lavoro:

« Un fascio di superficie φ dell'ordine n abbia la base costituita da t « punti P_l e da τ curve C_i. Ogni punto P_l sia multiplo (ordinario) secondo « l ($l > 1$), per ciascuna superficie φ e il cono in esso tangente alla super- « ficie medesima vari col variare di questa nel fascio. Così ogni curva C_i, « d'ordine m_i e rango r_i, sia multipla (ordinaria) secondo i per ciascuna « superficie φ, e gli i piani tangenti in uno stesso punto di C_i alla superficie « medesima varino col variare di questa nel fascio. Inoltre, ogni curva C_i « passi con h_{il} rami per ciascun punto P_l e si appoggi ad ogni altra curva « C_j ($j \geq i$) in k_{ij} punti. Infine, il fascio dato contenga δ superficie dege- « neri, ciascuna delle quali sia composta da due superficie A e B, che si « taglino, fuori della base, secondo una curva Δ_δ, dell'ordine μ_δ e del ge- « nere π_δ, la quale passi con $p_{\delta l}$ rami per ogni punto P_l e si appoggi in « $q_{\delta i}$ punti ad ogni curva C_i. In tali ipotesi, il numero D dei punti doppî « del fascio è somministrato dalla formula:

$$
\begin{aligned}
D = {} & 4(n-1)^3 - \sum_l 2(l-1)^2(2l+1) - \\
& - \sum_i [2(6i^2-3i-1)n - 2(4i^3+3i^2-4i-1)]\, m_i + \\
& + \sum_i (4i^3-3i^2+1)\, r_i + \sum_{il} 2[2i^2(3l-2i) - 3il - (l-2i)]\, h_{il} + \\
& + \sum_{ij} 2[2i^2(3j-i) - 3ij - (j-i)]\, k_{ij} - \\
& - \sum_\delta 2(4\mu_\delta + 3\pi_\delta - 3) + \sum_{\delta l} 4p_{\delta l} + \sum_{\delta l} 2q_{\delta i}\,.
\end{aligned}
$$

[1] Per questi casi veggasi: 1°. Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, n. 125; 2°. Pieri, *Sopra alcuni problemi riguardanti i fasci di curve e di superficie algebriche*, Giornale di Battaglini, vol. XXIV (1886); 3°. Guccia, *Sur les*

Questa formula può essere messa sotto un aspetto molto più semplice, introducendo il genere aritmetico P di una superficie φ del fascio, l'invariante Ω di Castelnuovo-Enriques della superficie medesima, e il genere p della curva semplice, che con le curve C_i completa la base del fascio [1]. Infatti, se si ricordano le espressioni di questi tre caratteri in funzione dell'ordine n delle superficie φ e delle caratteristiche de' suoi elementi multipli [2] si trova facilmente:

$$(1) \qquad D = 24P - 2\Omega + 2p - 2t - 2\sum_i m_i + \sum_i r_i + 20 - \\ - \sum_\delta 2(4\mu_\delta + 3\pi_\delta - 3) + \sum_{\delta i} 4p_{\delta i} + \sum_{\delta i} 2q_{\delta i}.$$

2. Ciò premesso, suppongasi di avere due spazî Σ e Σ', fra i punti dei quali abbia luogo una corrispondenza birazionale.

La base del sistema omaloidico $|\varphi|$ formato dalle superficie φ di Σ corrispondenti ai piani α' di Σ', risulti costituito da τ curve C_i, e da σ punti P_l, di cui s siano semplici ($l = 1$), e i rimanenti $t = \sigma - s$ siano multipli secondo l ($l > 1$). In ogni punto semplice P_1 le superficie φ non abbiano alcun contatto fra loro, e rispetto agli altri elementi fondamentali di Σ si comportino in modo da soddisfare alle medesime condizioni imposte nel n. precedente alle superficie del fascio ivi considerato.

Ipotesi e notazioni analoghe valgano per gli elementi fondamentali dello spazio Σ'.

Ora nel sistema di superficie $|\varphi|$ prendasi un fascio (φ), il quale corsponde in Σ ad un fascio (α') di piani α' dello spazio Σ'.

Il numero dei punti doppî del fascio (φ) è dato dalla formula (1), tenendo conto delle seguenti proprietà particolari, di cui gode il fascio medesimo, come appartenente ad un sistema omaloidico.

1°) Ogni superficie φ è razionale, epperò si ha:

$$P = 0:$$

2°) La curva (semplice e variabile col fascio (φ)), che insieme con le curve fondamentali C_i, completa la base del fascio medesimo, è la curva dello spazio Σ, che corrisponde ad una retta di Σ', all'asse del fascio (α') di piani, e quindi anche essa è razionale; perciò si ha pure:

$$p = 0.$$

---

points doubles d'un faisceau de surfaces algebriques. Comptes rendus (1895); 4°, Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche.* Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI (1895).

[1] Se questa curva manca è da porre $p = 1$.

[2] Per queste espressioni si può vedere la mia Nota ricordata in principio.

3°) Ogni superficie φ è rappresentabile punto per punto sul piano α', che le corrisponde in Σ'. Essa contiene s punti, ai quali corrispondono sul piano α' altrettante curve razionali, e possiede $\sum_{i'} m'_{i'}$ curve eccezionali, essendo $m'_{i'}$ l'ordine di una curva fondamentale $C'_{i'}$. Quindi il suo invariante Ω è dato dalla formula [1]:

$$\Omega = 10 + s - \sum_{i'} m'_{i'}.$$

4°) Infine, il fascio (φ) contiene σ' superficie degeneri, poichè ad ogni piano del fascio (α'), che passi per uno dei σ' punti fondamentali $P'_{l'}$ di Σ' corrisponde in Σ una superficie composta dalla superficie A corrispondente al Punto $P'_{l'}$ e da una superficie B, che con la precedente costituisce una superficie φ.

Questa superficie B è rappresentabile punto per punto sul piano α' e le sue sezioni piane hanno per immagini, sopra α', curve, che posseggono in $P'_{l'}$ un punto multiplo secondo l'. Quindi alle direzioni uscenti da questo punto e situate sul piano α' corrispondono biunivocamente sulla superficie B i punti di una curva razionale dell'ordine l'. Questa curva è l'intersezione Δ_δ fuori delle curve fondamentali C_i, delle due superficie A e B. Si ha pertanto:

$$\mu_\delta = l' \qquad \pi_\delta = 0.$$

Inoltre, ad un punto fondamentale P_l di Σ corrisponde in Σ' una superficie A', la quale possiede nel punto $P'_{l'}$ dianzi considerato, un punto di moltiplicità $p_{\delta l}$, in modo che essa viene tagliata dal piano α' secondo una curva avente in $P'_{l'}$ un punto di eguale moltiplicità. Così sul piano α' restano determinate $p_{\delta l}$ direzioni uscenti da $P'_{l'}$, alle quali corrispondono altrettanti punti M sulla curva Δ_δ. Ma quelle direzioni sono tangenti in $P'_{l'}$ alla superficie A', ai punti della quale corrispondono i punti infinitamente vicini a P_l; dunque questi $p_{\delta l}$ punti M di Δ_δ sono infinitamente vicini a P_l. Ciò dimostra che la curva Δ_δ ha in P_l un punto multiplo secondo $p_{\delta l}$; epperò si conclude che questa curva Δ_δ possiede in ogni punto P_l di Σ un punto di moltiplicità eguale a quella che ha in $P'_{l'}$ la superficie di Σ' corrispondente a quel punto P_l.

Infine, in modo analogo si trova che la medesima curva Δ_δ si appoggia ad ogni curva C_i di Σ in un numero $q_{\delta i}$ di punti eguale alla moltiplicità di $P'_{l'}$ per la superficie di Σ' corrispondente a quella curva C_i.

Ora è noto che la Jacobiana del sistema omaloidico delle superficie φ' di Σ', corrispondenti ai piani α di Σ, è costituita dalle superficie di Σ',

[1] Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, nn. 5 e 21. Annali di Matematica, tomo VI, serie III (1900).

che corrispondono alle curve C_i e ai punti P_i di Σ, contate rispettivamente *una* e *due* volte; ed inoltre che la medesima Jacobiana possiede in ogni $P'_{i'}$ un punto multiplo secondo $4l' - 2$. Quindi facendo la somma dei rami con i quali una curva Δ_δ passa per tutti i punti P_i, e dei punti in cui si appoggia a tutte le curve C_i, si ha:

$$\sum_i 2p_{\delta i} + \sum_i q_{il} = 4l' - 2$$

donde estendendo la somma medesima a tutte le σ' curve Δ_δ, si ricava:

$$\sum_{\delta i} 2p_{\delta i} + \sum_{\delta i} r_{il} = 4 \sum l' - 2\sigma' .$$

In tal modo sono noti, per il caso attuale, i valori dei differenti termini, che figurano nella formula (1). Quindi, sostituendo, si trova:

Il numero dei punti doppî del fascio (φ) è dato dalla formula:

$$D = 2 \sum_{i'} m'_{i'} + 2\sigma' - 2 \sum_i m_i - 2\sigma + \sum r_i .$$

D'altra parte, a questo fascio (φ) di Σ corrisponde in Σ' un fascio (α') di piani, e, come sarà dimostrato altrove, fra i piani di questo fascio *solamente* quelli che riescono tangenti alle curve fondamentali $C'_{i'}$ di Σ', hanno per corrispondenti nel fascio (φ) superficie dotate di un punto doppio situato fuori degli elementi fondamentali di Σ. Quindi, essendo $r'_{i'}$ il rango di una curva $C'_{i'}$, si ha ancora:

$$D = \sum_{i'} r'_{i'} .$$

Dal confronto di questa formula con la precedente si deduce la relazione:

$$2\sigma + 2 \sum_i m_i - \sum_i r_i = 2\sigma' + 2 \sum_{i'} m'_{i'} - \sum_{i'} r'_{i'} \tag{2}$$

la quale lega fra loro gli elementi fondamentali dei due spazî Σ e Σ'.

Ma questa relazione può esser messa sotto una forma più semplice e ben più notevole.

Se si indica con ϱ_i il genere di una curva C_i, si ha:

$$2(\varrho_i - 1) = r_i - 2m_i ,$$

donde, essendo τ il numero delle curve C_i, si ricava:

$$2 \sum_i \varrho_i - 2\tau = \sum_i r_i - 2 \sum_i m_i .$$

Analogamente si ottiene:

$$2\sum_{i'} \varrho'_{i'} - 2\tau' = \sum_{i'} r'_{i'} - 2\sum_{i'} m'_{i'}\,.$$

In virtù di queste due formule, dalla (2) si deduce infine il teorema seguente:

« Se fra i punti di due spazî Σ e Σ' ha luogo una corrispondenza bi-
« razionale, i cui elementi fondamentali soddisfino alle condizioni ad essi
« imposte in principio di questo n. 2, fra gli elementi stessi sussiste la
« relazione:

$$\sigma + \tau - \sum_{i} \varrho_i = \sigma' + \tau' - \sum_{i'} \varrho'_{i'}\,,$$

« nella quale σ e τ indicano rispettivamente i numeri dei punti e delle
« curve fondamentali dello spazio Σ, e ϱ_i $(i = 1, 2, \ldots \tau)$ è il genere di
« una di queste curve: i simboli σ', τ', ϱ' hanno i medesimi significati ri-
« spetto agli elementi fondamentali dello spazio Σ' ».

3. Le due proprietà delle trasformazioni birazionali dello spazio dimostrate nella mia Nota più volte citata e nella Nota attuale, sono state rispettivamente dedotte dalla considerazione della superficie Jacobiana del sistema omaloidico formato dalle superficie di uno spazio, che corrispondono ai piani dell'altro spazio, e dal numero dei punti doppî (gruppo Jacobiano) di un fascio contenuto nel sistema anzidetto. È quindi probabile che l'esame della curva Jacobiana di una rete di superficie appartenente al sistema medesimo, conduca a qualche altra relazione fra gli elementi fondamentali dei due spazî, diversa da quelle già ottenute. Questo studio mi propongo di fare in seguito.

Matematica. — *Sopra l'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* Nota del dott. G. C. Evans, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

§ 1.

1. Consideriamo l'equazione

$$u(x) = \varphi(x) + \int_x^\infty \frac{G(x, \xi)}{f(\xi)\, g(x)}\, u(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

ove sono continue le funzioni $f(\xi)$, $g(x)$. Per mezzo di una trasformazione della funzione $u(x)$

$$u(x) = \frac{u_1(x)}{g(x)}$$