# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XX.**

1° SEMESTRE.


ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

---

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Analogamente si ottiene:

$$2\sum_{i'}\varrho'_{i'}-2\tau'=\sum_{i'}r'_{i'}-2\sum_{i'}m'_{i'}.$$

In virtù di queste due formule, dalla (2) si deduce infine il teorema seguente:

« Se fra i punti di due spazî $\Sigma$ e $\Sigma'$ ha luogo una corrispondenza bi- « razionale, i cui elementi fondamentali soddisfino alle condizioni ad essi « imposte in principio di questo n. 2, fra gli elementi stessi sussiste la « relazione:

$$\sigma+\tau-\sum_i\varrho_i=\sigma'+\tau'-\sum_{i'}\varrho'_{i'},$$

« nella quale $\sigma$ e $\tau$ indicano rispettivamente i numeri dei punti e delle « curve fondamentali dello spazio $\Sigma$, e $\varrho_i$ $(i=1,2,\dots\tau)$ è il genere di « una di queste curve: i simboli $\sigma',\tau',\varrho'$ hanno i medesimi significati ri- « spetto agli elementi fondamentali dello spazio $\Sigma'$ ».

3. Le due proprietà delle trasformazioni birazionali dello spazio dimostrate nella mia Nota più volte citata e nella Nota attuale, sono state rispettivamente dedotte dalla considerazione della superficie Jacobiana del sistema omaloidico formato dalle superficie di uno spazio, che corrispondono ai piani dell'altro spazio, e dal numero dei punti doppî (gruppo Jacobiano) di un fascio contenuto nel sistema anzidetto. È quindi probabile che l'esame della curva Jacobiana di una rete di superficie appartenente al sistema medesimo, conduca a qualche altra relazione fra gli elementi fondamentali dei due spazî, diversa da quelle già ottenute. Questo studio mi propongo di fare in seguito.

## Matematica. — *Sopra l'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* Nota del dott. G. C. Evans, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

### § 1.

1. Consideriamo l'equazione

$$u(x)=\varphi(x)+\int_x^\infty\frac{\mathrm{G}(x,\xi)}{f(\xi)\,g(x)}\,u(\xi)\,d\xi \tag{1}$$

ove sono continue le funzioni $f(\xi)$, $g(x)$. Per mezzo di una trasformazione della funzione $u(x)$

$$u(x)=\frac{u_1(x)}{g(x)}$$

l'equazione (1) può scriversi nella forma

$$(2) \qquad u_1(x) = \varphi(x)\, g(x) + \int_x^\infty \frac{G(x\,,\xi)}{f(\xi)\, g(\xi)}\, u_1(\xi)\, d\xi\,.$$

Trovata la funzione $u(x)$ in modo che la (1) sia soddisfatta, viene trovata $u_1(x)$ in modo che la (2) è soddisfatta, e reciprocamente, trovata $u_1(x)$ tale che soddisfaccia la (2), può trovarsi $u(x)$ tale che sia soddisfatta la (1).

2. Consideriamo dunque l'equazione

$$(3) \qquad u(x) = \varphi(x) + \int_x^\infty \frac{G(x\,,\xi)}{f(\xi)}\, u(\xi)\, d\xi\,.$$

Porremo

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x)$$

$$G_{10}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x} G(x\,,y)$$

$$G_{01}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial y} G(x\,,y)$$

e considereremo le ipotesi seguenti delle quali faremo uso in parte o del tutto nei teoremi da svolgersi:

a) *Nel tratto* $x \geqq a$, *sia* $\varphi(x)$ *continua* (¹), *finita in valore assoluto* $< M$, *e tale che* $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = \varphi(\infty)$ *esista, e sia* $f(x)$ *continua e positiva* $(> 0)$; *e nel campo* $y \geqq x \geqq a$ *sia la funzione* $G(x\,,y)$ *continua, e finita in valore assoluto* $< M$.

L'ipotesi a) non esclude che $\lim_{x=\infty} f(x) = 0$, o che $\lim_{x=\infty} f(x) = \infty$.

b) *Nel tratto* $x \geqq a$ *le funzioni* $\varphi'(x)$, $f(x)$ *siano continue e finite in valore assoluto* $< M$; *nel campo* $y \geqq x \geqq a$ *le funzioni* $G_{10}(x\,,y)$ *e* $G_{01}(x\,,y)$ *siano continue* (²), *e finite in valore assoluto* $< M$; *e sia* $G(x\,,y)$ *tale che esista*

$$\lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} G(x\,,y) = G(\infty\,,\infty) \gtreqless 0\,.$$

c) *Sia* $\varphi(\infty) = 0$.

(¹) « Continua in un punto » s'intende anche finita nel punto.

(²) Bastano condizioni meno ristrettive sulle funzioni $G_{01}$ e $G_{10}$. Si vedano per esempio le condizioni A), A'). Trans. American Math. Soc., vol. II, pp. 397-405, n. 4, oct. 1910.

3. Sull'equazione (3) facciamo la sostituzione

$$x = \frac{1}{z} \quad , \quad \xi = \frac{1}{\eta} \quad , \quad d\xi = -\frac{1}{\eta^2}\, d\eta .$$

Avremo, se una soluzione esiste,

$$u\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) + \int_0^z \frac{G\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\xi}\right)}{\eta^2 f\left(\frac{1}{\eta}\right)} u\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta . \tag{4}$$

In questa equazione si ha

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi(x) \\ \frac{d}{dz}\, \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\, \varphi'\left(\frac{1}{z}\right) = -x^2 \varphi'(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta^2 f\left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{\xi^2}\, f(\xi) \\ \frac{d}{d\eta}\left(\eta^2 f\left(\frac{1}{\eta}\right)\right) = 2\eta f\left(\frac{1}{\eta}\right) - f'\left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{2}{\xi}\, f(\xi) - f'(\xi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\eta}\right) = G(x\,,\xi) \\ \frac{\partial}{\partial z} G\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\eta}\right) = -\frac{1}{z^2}\, G_{10}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\eta}\right) = -x^2\, G_{10}(x\,,\xi) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} G\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\eta}\right) = -\frac{1}{\eta^2}\, G_{01}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\eta}\right) = -\xi^2\, G_{01}(x\,,\xi) . \end{cases}$$

Supponiamo che l'ipotesi a) valga e che

$$\int_a^\infty \frac{d\xi}{f(\xi)} = \lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{d\xi}{f(\xi)} = \lim_{z=0} \int_z^{\frac{1}{a}} \frac{d\eta}{\eta^2 f\left(\frac{1}{\eta}\right)} = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{d\eta}{\eta^2 f\left(\frac{1}{\eta}\right)}$$

esista. Allora si ha [1] che esiste una soluzione ed una solamente, la quale è finita e continua in tutto il campo, escluso al più un numero finito di punti di tale campo. Anzi, in virtù dell'esistenza dell'integrale ($\alpha$), questa soluzione non avrà alcun punto di discontinuità. Quindi, tornando all'equazione (3) noi abbiamo il teorema seguente:

Teorema I. *Se vale l'ipotesi* a) *e se*

$$\lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{d\xi}{f(\xi)} \cdot$$

[1] Trans. American Math. Soc., vol. II, n. 4, pag. 398, oct. 1910.

*esiste, ne segue che dell'equazione* (3) *esiste una e una sola soluzione* $u(x)$, *finita e continua per* $x \geqq a$ *eccettuato al più un numero finito di punti. Questa soluzione anzi è continua dappertutto e tale che* $\lim\limits_{x=\infty} u(x)$ *esiste.*

Supponiamo ora che le ipotesi a) b) c) valgano. Inoltre si supponga che possa trovarsi una costante M tale che

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{I}') & \frac{1}{x} f(x) < \mathrm{M} \\ (\mathrm{I}'') & x^2 |\varphi'(x)| < \mathrm{M} \\ (\mathrm{I}''') & x^2 |\mathrm{G}_{10}(x,y)| < \mathrm{M} \\ (\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}) & y^2 |\mathrm{G}_{01}(x,y)| < \mathrm{M} \end{array}\right\} \; y \geqq x \geqq a .$$

In conseguenza di queste ipotesi l'equazione (4) diviene un'equazione già da me trattata [1]. In questo caso in virtù della (I′) l'integrale

$$\int_z^{\frac{1}{a}} \frac{d\eta}{\eta^2 f\left(\frac{1}{\eta}\right)}$$

diverrà infinito quando $z$ s'avvicinerà a 0. Perciò se (*i*) $\mathrm{G}\left(\frac{1}{0}, \frac{1}{0}\right) < 0$, si ha che esiste una soluzione continua nell'intervallo $0 \leqq z \leqq \frac{1}{a}$; e se (*ii*) $\mathrm{G}\left(\frac{1}{0}, \frac{1}{0}\right) > 0$, si ha che esiste un numero infinito di soluzioni continue nello stesso intervallo, le quali possono scriversi nella forma

$$u\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{U}\left(\frac{1}{z}\right) + \mathrm{CW}\left(\frac{1}{z}\right)$$

dove C è una costante arbitraria [2]. Si ha inoltre che ogni soluzione la quale sia continua, eccetto in un numero finito di punti nel tratto $0 \leqq z \leqq \frac{1}{a}$, deve essere finita e continua quando $z = 0$ [3].

Tornando ancora all'equazione (3) avremo il

TEOREMA 2. *Se sussistono le ipotesi* a) b) c) *ed inoltre si ha*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} f(x) < \mathrm{M} \\ x^2 |\varphi'(x)| < \mathrm{M} \\ x^2 |\mathrm{G}_{10}(x,y)| < \mathrm{M} \\ y^2 |\mathrm{G}_{01}(x,y)| < \mathrm{M} \end{array}\right\} \; y \geqq x \geqq a$$

[1] Il manoscritto fu presentato per la pubblicazione nel Trans. American Math. Soc. Per il teorema si veda Bull. American Math. Soc. 2d series, vol. XVI, n. 3, pag. 134.

[2] Loc. cit.

[3] Loc. cit., pag. 3. Per il teorema si veda loc. cit., Bull. American Math. Soc. pag. 135, aggiungendo alla conclusione del teorema le parole « except possibly at $x = b$ ».

*ne segue che*

(*i*) *se* $G(\infty,\infty) < 0$ *vi è una soluzione* $u(x)$ *dell'equazione* (3) *continua per* $x \geqq a$ *e tale che* $\lim_{x=\infty} u(x)$ *esiste, e*

(*ii*) *se* $G(\infty,\infty) > 0$ *vi è un numero infinito di soluzioni* $u(x)$ *continue per* $x \geqq a$, *e tali che* $\lim_{x=\infty} u(x)$ *esiste. Si possono scrivere nella forma*

$$u(x) = U(x) + CW(x)$$

*ove* C *è una costante arbitraria.*

*Inoltre, ogni soluzione* $u(x)$ *continua, fuorchè in un numero finito di punti, risulta continua nell'intorno del punto* $x=\infty$ *e tale che* $\lim_{x=\infty} u(x)$ *esiste.*

4. Facciamo nell'equazione (3) la sostituzione

$$x = e^{x_1} \quad , \quad \xi = e^{\xi_1} \quad , \quad d\xi = e^{\xi_1}\, d\xi_1 \, .$$

Essa diverrà

$$u(e^{x_1}) = \varphi(e^{x_1}) + \int_x^\infty \frac{G(e^{x_1}, e^{\xi_1})}{e^{-\xi_1} f(e^{\xi_1})}\, u(e^{\xi_1})\, d\xi_1 \, . \tag{5}$$

Avremo

$$\begin{cases} \varphi(e^{x_1}) = \varphi(x) \\[2mm] \dfrac{d}{dx}\,\varphi(e^{x_1}) = e^{x_1}\,\varphi'(e^{x_1}) = \varphi'(x) \\[2mm] x_1^2 \dfrac{d}{dx_1}\,\varphi(e^{x_1}) = x_1^2\, e^{x_1}\,\varphi'(e^{x_1}) = x(\log x)^2\,\varphi'(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{-\xi_1} f(e^{\xi_1}) = \dfrac{1}{\xi}\, f(\xi) \\[2mm] \dfrac{d}{d\xi_1}\left[e^{-\xi_1} f(e^{\xi_1})\right] = -\, e^{-\xi_1} f(e^{\xi_1}) + f'(e^{\xi_1}) = -\dfrac{1}{\xi}\, f(\xi) + f'(\xi) \\[2mm] \dfrac{1}{\xi_1}\dfrac{d}{d\xi_1}\left[e^{-\xi_1} f(e^{\xi_1})\right] = -\dfrac{1}{x\log x}\, f(x) + \dfrac{1}{\log x}\, f'(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(e^{x_1}, e^{\xi_1}) = G(x,\xi) \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x_1}\, G(e^{x_1}, e^{\xi_1}) = e^{x_1}\, G_{10}(e^{x_1}, e^{\xi_1}) = x\, G_{10}(x,\xi) \\[2mm] x_1^2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}\, G(e^{x_1}, e^{\xi_1}) = x(\log x)^2\, G_{10}(x,\xi) \\[2mm] \xi_1^2 \dfrac{\partial}{\partial \xi_1}\, G(e^{x_1}, e^{\xi_1}) = \xi(\log \xi)^2\, G_{01}(x,\xi) \, . \end{cases}$$

Supposte verificate le ipotesi a), b), c), si supponga inoltre che si abbia

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{1}{x}f(x) & < M \\ x(\log x)^2\,|\varphi'(x)| & < M \\ x(\log x)^2\,|G_{10}(x\,,y)| < M \\ y(\log y)^2\,|G_{01}(x\,,y)| < M\end{array}\right\} y \geqq x \geqq a\,.$$

Allora vengono soddisfatte nell'equazione (5) le ipotesi del teorema (2), e si ha nei due casi $G(\infty\,,\infty) < 0$ e $G(\infty\,,\infty) > 0$ una o un numero infinito rispettivamente di funzioni continue che soddisfanno l'equazione (5) e tali che ciascuna s'avvicina ad un certo limite quando diviene infinita la variabile. Inoltre, siccome le proprietà della continuità e del possedere un valore determinato nel punto infinito si conservano con una trasformazione $x = e^{x_1}$, si ha che tutte le soluzioni, se sono continue fuorchè in un numero finito di punti, devono essere continue (cioè anche finite) nell'intorno del punto $z = 0$, e tali che ciascuna s'avvicini ad un certo limite quando diviene infinita la variabile. Si ha dunque il

Teorema 3. *Se sussistono le ipotesi* a) b) c) *e inoltre si ha*

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{1}{x}f(x) & < M \\ x(\log x)^2\,|\varphi'(x)| & < M \\ x(\log x)^2\,|G_{10}(x\,,y)| < M \\ y(\log y)^2\,|G_{01}(x\,,y)| < M\end{array}\right\} y \geqq x \geqq a$$

*seguono le conclusioni del teorema* 2.

5. Facendosi sull'equazione (3) la stessa sostituzione $x = e^{x_1}$ può ampliarsi ancora la generalità delle funzioni $\varphi(x)$, $G(x\,,y)$, per mezzo del teorema (3). Le ipotesi da aggiungersi alle a) b) c) divengono in questo caso

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{1}{x}f(x) & < M \\ x\,|\log x(\log\log x)^2\,\varphi'(x)| & < M \\ x\,|\log x(\log\log x)^2\,G_{10}(x\,,y)| < M \\ y\,|\log y\,(\log\log y)^2\,G_{01}(x\,,y)| < M\end{array}\right\} y \geqq x \geqq a.$$

Procedendo così di seguito queste condizioni divengono

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{1}{x}f(x) & < M \\ x\,|\log x\,\log^2(x)\ldots\log^n(x)\,(\log^{n+1}(x))^2\,\varphi'(x)| & < M \\ x\,|\log x\,\log^2(x)\ldots\log^n(x)\,(\log^{n+1}(x))^2\,G_{10}(x\,,y)| < M \\ y\,|\log y\,\log^2(y)\ldots\log^n(y)\,(\log^{n+1}(y))^2\,G_{01}(x\,,y)| < M\end{array}\right\} y \geqq x \geqq a.$$

In modo analogo procedendo per mezzo della sostituzione $z = e^{-\frac{1}{z_1}}$ può ampliarsi la generalità delle funzioni $\varphi(z)$, $G(z, \eta)$ nell'equazione

$$u(z) = \varphi(z) + \int_0^z \frac{G(z, \eta)}{f(\eta)} u(\eta)\, d\eta . \tag{6}$$

Ossia può farsi una trasformazione dapprima dall'equazione (3) all'equazione (6) per mezzo della sostituzione

$$x = \frac{1}{z}$$

e poscia dall'equazione (6) all'equazione (3) per mezzo della sostituzione

$$z = e^{-x_1};$$

e così di seguito.

6. È interessante notare che nel caso del limite infinito si può avere un numero infinito di soluzioni, come dimostrano i teoremi (2) (3), mentre resta finito e continuo il nucleo $G(x, y)/f(y)$ dell'equazione. Per altro, può limitarsi in qualche caso definitivamente il numero delle soluzioni.

Se valgono le ipotesi a) b), e la ipotesi aggiunta nel teorema 1, la (4) può scriversi nella forma

$$u(z) = \varphi(z) + \int_0^z f(\eta)\, G(z, \eta)\, u(\eta)\, d\eta , \tag{7}$$

ove le funzioni $\varphi(z)$, $G(z, \eta)$ colle derivate del primo ordine sono continue, mentre si ha $f(z) > 0$ quando si ha $z > 0$, e $G(z, \eta) \neq 0$ nell'intorno del punto $z = 0$, $\eta = 0$. Ma in questo caso ogni soluzione se è continua, fuorchè in un numero finito di punti, deve essere continua (cioè anche finita) dappertutto nell'intorno del punto $z = 0$ [1]. Si ha dunque, partendo dal teorema 1, il

Teorema 4. *Se valgono le ipotesi* a) b) *e se inoltre* $\lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{d\xi}{f(\xi)}$ *esiste, segue che nel tratto* $x \geqq a$, *(a essendo una costante sufficientemente grande) esiste una sola soluzione dell'equazione* (3) *continua per* $x \geqq a$, *fuorchè in un numero finito di punti. Questa soluzione anzi è continua per* $x \geqq a$, *e tale che s'avvicina ad un valore determinato quando diviene infinita la variabile* $x$.

[1] Bull. American Math. Soc. 2ª series, vol. XVI, n. 3, pag. 135, aggiungendo alla conclusione del teorema le parole « except possibly at $x = b$ ».